Graad 12 – Handboek
(Eerste KABV uitgawe)

INHOUD:

Hierdie boek is opgestel en verwerk deur E.J. Du Toit in 2023.

Webtuiste: www.abcbooks.co.za

MET SPESIALE DANK EN ERKENNING AAN DIE DEPARTEMENT VAN ONDERWYS VIR DIE GEBRUIK VAN UITTREKSELS UIT OU VRAESTELLE.

ISBN 978-1-928336-61-7

Besoek ook www.abcmathsandscience.co.za vir ekstra oefeninge, toetse en vraestelle.

Hoofstuk A2
Logaritmes en funksie inverses

Sien graad 11 Funksies en eksponente vir hersiening en agtergrond!

A2.1 Logaritmes:
A2.1.1 Definisie van 'n logaritme:

Logaritmes is die omgekeerde bewerking van eksponente.

Bv. As $2^5 = 32$ dan is $\log_2 32 = 5$

$\therefore$ Per definisie as $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ met $a > 0$; $a \neq 1$ en $x > 0$

Onthou: * $\log_a 1 = 0$ want $a^0 = 1$

* Die natuurlik logaritme is $\log x \Leftrightarrow \log_{10} x$

* $\log_a a = 1$ want $a^1 = a$

A2.1.2 Wette van logaritmes:

Vir $a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$; $b \neq 1$; $x > 0$ en $y > 0$

- $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
- $n \log_a x = \log_a x^n$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Vb. 1 Vereenvoudig: (Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.)

(a) $\log_4 2 + \log_4 32$

$= \log_4(2 \times 32)$

$= \log_4(64)$

$= \log_4(4^3)$

$= 3\log_4(4)$

$= 3(1)$

$= 3$

(b) $\log 200 - \log 2$

$= \log(200 \div 2)$

$= \log 100$

$= \log_{10} 10^2$

$= 2\log_{10} 10$

$= 2(1)$

$= 2$

(c) $\log_3 36 \times \log_6 9$

$= \frac{\log 36}{\log 3} \times \frac{\log 9}{\log 6}$

$= \frac{\log 6^2}{\log 3} \times \frac{\log 3^2}{\log 6}$

$= \frac{2\log 6}{\log 3} \times \frac{2\ \log 3}{\log 6}$

$= \frac{2\cancel{\log 6}}{\cancel{\log 3}} \times \frac{2\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 6}}$

$= 2 \times 2$

$= 4$

(d) $\log_4 16 + \log_3 \frac{1}{3} - \log_7 1$

$= \log_4 4^2 + \log_3 3^{-1} - 0$

$= 2\log_4 4 + (-1)\log_3 3$

$= 2(1) - 1(1)$

$= 2 - 1$

$= 1$

Vb. 2 As $\log 3 = 0,477$ en $\log 5 = 0,699$, bereken:
(Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.)

(a) $\log 45$

$= \log(9 \times 5)$

$= \log(3^2 \times 5)$

$= \log 3^2 + \log 5$

$= 2\ \log 3 + \log 5$

$= 2 \times 0,477 + 0,699$

$= 0,954 + 0,699$

$= 1,653$

(b) $\log 30$

$= \log(3 \times 10)$

$= \log 3 + \log 10$

$= \log 3 + \log 10$

$= 0,477 + 1$

$= 1,477$

Vb. 3 Los op vir x: (Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.)

(a) $\log x + \log(x + 3) = 1$

$\therefore \log_{10} x(x + 3) = 1$

$\therefore 10^1 = x^2 + 3x$

$\therefore 0 = x^2 + 3x - 10$

$\therefore 0 = (x + 5)(x - 2)$

$\therefore x = -5$ of $x = 2$

maar $x \neq -5$, want $x > 0$

(b) $\log_3(x + 4) - \log_3 x = \log_3 5$

$\therefore \log_3 \frac{(x+4)}{x} = \log_3 5$

$\therefore \log_3 \frac{(x+4)}{x} = \log_3 5$

$\therefore \frac{(x+4)}{x} = 5$ [Per definisie]

$\therefore x + 4 = 5x$

$\therefore x - 5x = -4$

$\therefore -4x = -4$

$\therefore x = 1$

Vb. 4 Los op vir x: (Gebruik 'n sakrekenaar en gee die antwoorde korrek tot 2 desimale.)

(a) $3^x = 7$

$\therefore \log_3 7 = x$

$\therefore x = \frac{\log 7}{\log 3}$

$\therefore x \approx 1,77$

(b) $1,3 = 2^{x-3}$

$\therefore \log_2 1,3 = x - 3$

$\therefore x - 3 = \frac{\log 1,3}{\log 2}$

$\therefore x - 3 = 0,3785\ldots$

$\therefore x \approx 3,38$

Oefening 1:

(1) Skryf die volgende in logaritmiese vorm:

(a) $7^3 = 343$

(b) $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

(c) $y = 2^{x+1}$

(d) $2^{\log x} = 5$

(2) Skryf die volgende in eksponensiaal vorm:

(a) $\log_2 32 = 5$

(b) $\log y = k$

(c) $m = \log_3 k$

(d) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

(3) Skryf die volgende as aparte logaritmes met grondtal 10 as $\{x\,;y\,;t\,;p\} > 0$:

(a) $\log \dfrac{xy}{p}$

(b) $\log_t p^2 t$

(4) Skryf die volgende as ′n enkele logaritme $\{x\,;y\,;t\,;p\} > 0$:

(a) $\log t - \log y + 2\log p$

(b) $\log_2(x-2) - \log_2(x+1) - \log_2 x$

(5) Vereenvoudig, sonder ′n sakrekenaar:

(a) $\log 25 + \log 8 - \log 2$

(b) $\log_2 16 + 3\log_3\left(\frac{1}{9}\right) - \log_{15} 1$

(c) $\dfrac{\log 32 - \log 243}{\log 3 - \log 2}$

(d) $\dfrac{\log_5 27 + \log_5 9}{\log_5 \sqrt{3}}$

(e) $\log 8\,000 - \log 8$

(f) $\frac{1}{2}\log_4 16 + \log_{0,2} 0{,}04 - \log_3 \sqrt{27} - \log 25 \times \log_5 1$

(6) Los op vir x: [Waar nodig, rond af tot 2 desimale.]

(a) $\log_4 2x = 3$

(b) $\log_3(x+2) + \log_3 x = 1$

(c) $\log_2(2x+12) - 2\log_2 x = 1$

(d) $7^{3x} = 14$

(7) Skryf die volgende in terme van m en/of n as $\log 6 = m$ en $\log 3 = n$:

(a) $\log 18$

(b) $\log_{27} 36$

(c) $\log 300$

(d) $\log 20$

A2.2 Inverses:

Die reël vir die refleksie in die lyn $x = y$ is: $(x\,;\,y) \;\Leftrightarrow\; (y\,;\,x)$
Hierdie refleksie in die lyn $y = x$ word die inverse genoem $\Leftrightarrow$ die x en y ruil dus om!
Die inverse van $f(x)$ word geskryf as $f^{-1}(x)$.

Vb. 5 Bepaal $f^{-1}(x)$ in elk van die volgende in die vorm $f^{-1}(x) = \ldots$:

(a) $f(x) = 5x^2$

$\therefore$ Vir f is $y = 5x^2$

$\therefore$ Vir f^{-1} is $x = 5y^2$

$\therefore \quad \frac{x}{5} = y^2$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{\frac{x}{5}}$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{x}{5}}$

(b) $f : x \to \frac{3}{x+2}$

$\therefore$ Vir f is $y = \frac{3}{x+2}$

$\therefore$ Vir f^{-1} is $x = \frac{3}{y+2}$

$\therefore \quad y + 2 = \frac{3}{x}$

$\therefore \quad y = \frac{3}{x} - 2$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{3}{x} - 2$

Oefening 2:

(1) Bepaal f^{-1} van die volgende en skryf dit in die vorm $f^{-1}(x) = \ldots\ldots.$

(a) $f(x) = 3x - 4$

(b) $f(x) = 5^x$

(c) $f(x) = -2x^2$

(d) $f(x) = \log_{0,5} x$

(2) Bepaal g^{-1} van die volgende en skryf dit in die vorm $g^{-1} : x \to \ldots\ldots.$

(a) $g : x \to \frac{x}{4}$

(b) $g : x \to \log_3 x$

(c) $g : x \to 3^{x+1}$

(d) $g : x \to -0{,}5x$

(3) Bepaal h van die volgende en skryf dit in die vorm $h(x) = \ldots\ldots.$

(a) $h^{-1}(x) = \log_7 x$

(b) $h^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

(c) $h^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2$

(d) $h^{-1}(x) = \log x$

(4) Beskou die volgende: $p(x) = \{(1;7)\,;(2;8)\,;(3{:}\,9)\,;(4;10)\}$

(a) Is p 'n funksie? Motiveer jou antwoord.

(b) Skryf die waardeversameling neer van $p^{-1}(x)$.

(5) Verduidelik die verskil tussen $f^{-1}(x)$ en $(f(x))^{-1}$.

A2.3 Grafieke van inverses:

A2.3.1 Grafieke van inverses van die reguit lyn:

Sien graad 11 Lineêre Funksies vir hersiening en agtergrond!

Indien die funksie $f(x) = mx + c$ gegee word, sal die inverse as volg verkry word:

$f(x) = mx + c \iff y = mx + c$

$\therefore$ Vir die inverse ruil die x en y om: $x = my + c$

$\Longrightarrow y = \frac{x-c}{m}$ [Maak y die onderwerp!]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-c}{m}$ $\Longrightarrow$ Inverse funksie

Vb. 6 Gegee: $g(x) = 2x - 4$

(a) Bepaal $g^{-1}(x) = \ldots..$

(b) Skets $g(x)$ en $g^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel.

(a) $g(x)$: $y = 2x - 4 \iff$ $\therefore g^{-1}(x)$: $x = 2y - 4$

$\therefore 2y = x + 4$

$\therefore y = \frac{1}{2}x + 2$ $\therefore g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$

(b) Vir $g(x)$: x-afsnit $(y = 0)$ y-afsnit $(x = 0)$

$2x - 4 = 0$ $y = 2(0) - 4$

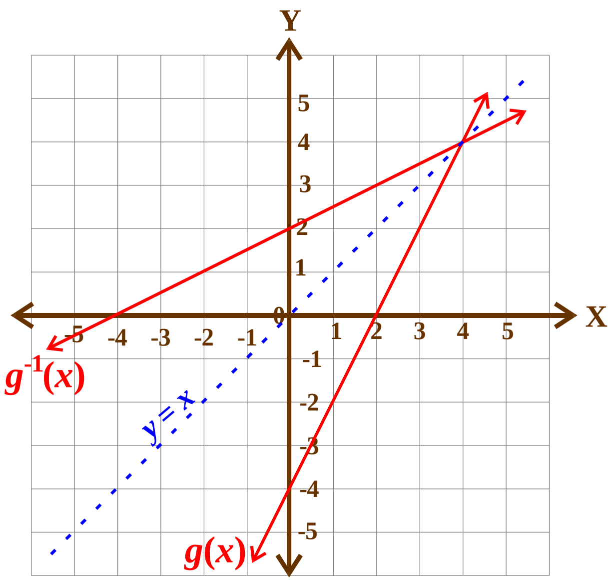
$\therefore x = 2$ $\therefore y = -4$

$\therefore (2\,;0)$ en $(0\,;-4)$

Vir $g^{-1}(x)$: x en y van $g(x)$ ruil om:

y-afsnit $(x = 0)$ x-afsnit $(y = 0)$

$\therefore (0\,;2)$ en $(-4\,;0)$



A2.3.2 Grafieke van inverses van die parabool:

Sien graad 11 Kwadratiese Funksies vir hersiening en agtergrond!

Vb. 7 Gegee: $g(x) = 2x^2$ **met** $x \geq 0$

(a) Bepaal $g^{-1}(x) = \ldots..$

(b) Skets $g(x)$ **en** $g^{-1}(x)$ **op dieselfde assestelsel.**

(c) Skryf die definisieversameling van $g^{-1}(x)$ **neer.**

(a) $g(x)$: $y = 2x^2$ **met** $x \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\therefore$ $g^{-1}(x)$: $x = 2y^2$ **met** $y \geq 0$

$\therefore \quad y^2 = \frac{x}{2}$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{\frac{x}{2}}$

maar $y \geq 0$

$\therefore \quad g^{-1}(x) = +\sqrt{\frac{x}{2}}$

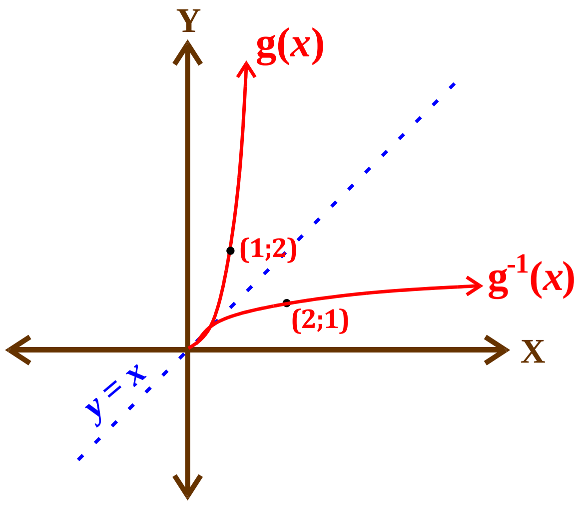
(b) Vir $g(x)$: **Gebruik 'n tabel, want die** x**-en-**y **afsnitte en die draaipunt is** $(0; 0)$.

x	0	1	2
y	0	2	8

$x \geq 0$

Vir $g^{-1}(x)$: x **en** y **van** $g(x)$ **ruil om:**

x	0	2	8
y	0	1	2



(c) $D_{g^{-1}}$: $x \geq 0$

A2.3.3 Grafieke van inverses van die eksponensiaal funksie:

Sien graad 11 Eksponensiaal Funksies vir hersiening en agtergrond!

Indien die funksie $f(x) = a^x$ gegee word, sal die inverse as volg verkry word:

$f(x) = a^x \Leftrightarrow y = a^x$

$\therefore$ Vir die inverse ruil die x en y om: $x = a^y$

$\Longrightarrow y = \log_a x$ [Maak y die onderwerp!]

$\therefore$ Die inverse van 'n eksponensiaal funksie is 'n logaritmiese funksie.

Vb. 8 Gegee: $g(x) = 2^x$

(a) Bepaal $g^{-1}(x) = \ldots\ldots$

(b) Skets $g(x)$ en $g^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel.

(c) Skryf die vergelyking van $g^{-1}(x)$ se asimptoot neer.

(a) $g(x)$: $y = 2^x \quad \Leftrightarrow \quad \therefore g^{-1}(x)$: $x = 2^y$

$\therefore y = \log_2 x$

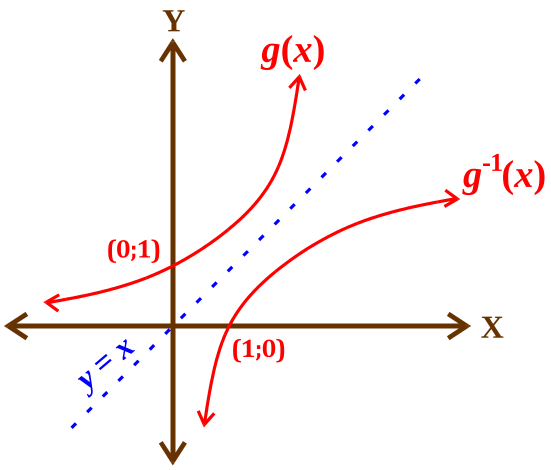
$\therefore g^{-1}(x) = \log_2 x$

(b) Vir $g(x)$:

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{2}$	1	2

Vir $g^{-1}(x)$: x en y van $g(x)$ ruil om:

x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-1	0	1



(c) Asimptoot van $g^{-1}(x)$:

$x = 0$

<u>Oefening 3</u>:

(1) (a) Skets: $g(x) = x^2 + 1$ vir $x \leq 0$.

(b) Bepaal g^{-1} en skryf dit in die vorm $g^{-1}(x) = \ldots\ldots.$

(c) Skets $g^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel as $g(x)$.

(d) Skryf $g^{-1}(x)$ se waardeversameling neer.

(2) Gegee: $h(x) = 2^{-x}$

(a) Bepaal h^{-1} en skryf dit in die vorm $h^{-1}(x) = \ldots\ldots.$

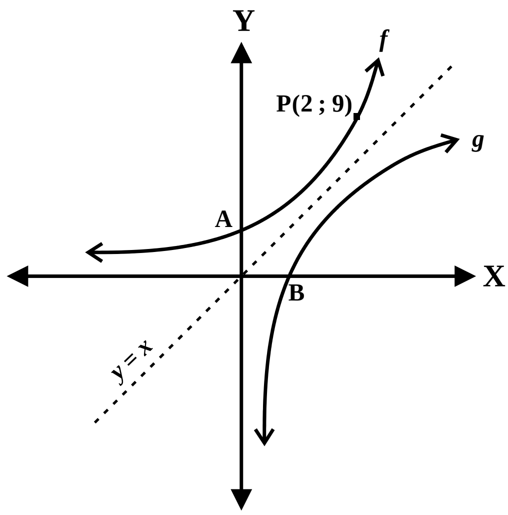
(b) Skets h en h^{-1} op dieselfde assestelsel.

(c) Skryf $h^{-1}(x)$ se definisieversameling neer.

(d) As p die refleksie van h in die y-as is, bepaal die vergelyking van p en skryf dit in die vorm $p(x) = \ldots\ldots.$

(e) Bepaal p^{-1} en skryf dit in die vorm $p^{-1}(x) = \ldots\ldots.$

(3) Gegee: $f(x) = a^x$ en $g(x)$ met P$(2\,;\,9)$.



(a) Bepaal die waarde van a.

(b) Gee die koördinate van A.

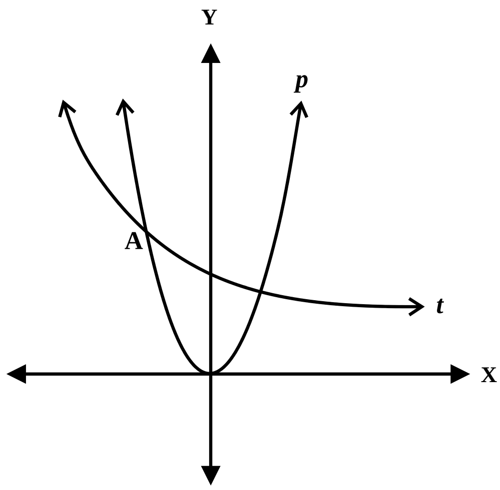
(c) Bepaal die vergelyking van $g(x)$, as $g(x)$ die spieëlbeeld is van $f(x)$ in die lyn $y = x$.

(d) Gee die koördinate van B.

(e) Vir watter waardes van x is $g(x)$ gedefinieer?

(f) Skryf die vergelyking van $g(x)$ se asimptoot neer.

(4) Gegee: $t(x) = a^x$ en $p(x) = bx^2$ met A$(-2\,;\,4)$.



(a) Bepaal die waardes van a en b.

(b) Skryf die volgende neer: $t^{-1}(x) = \ldots\ldots$

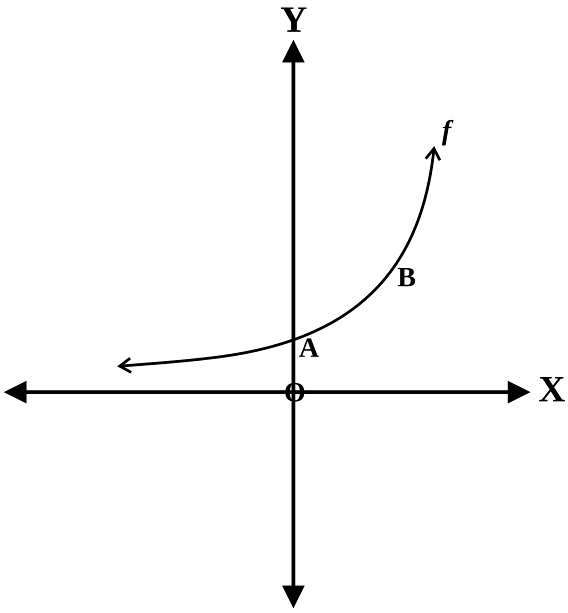
(c) Skryf die volgende neer: $p^{-1}(x) = \ldots\ldots$

(d) Verduidelik hoekom $p^{-1}(x)$ nie 'n funksie is nie.

(e) Bepaal x waarvoor $t^{-1}(x) \geq 0$.

(f) Bereken: $t^{-1}(0{,}25) + p(3)$

(5) Die grafiek van $f(x) = a^x$ is langsaan geskets.
Die punt B$(3; 8)$ lê op die grafiek van f.



(a) Toon aan dat $a = 2$ is.

(b) Skryf die koördinate van A neer.

(c) Skryf die vergelyking van $f^{-1}(x)$ in die vorm $f^{-1}(x) = \cdots$ neer.

(d) Skets die grafiek van f^{-1}.
Dui die x-afsnit en EEN ander punt aan.

(e) Vir watter waardes van x sal $f^{-1}(x) = f(x)$?

(f) Skryf die vergelyking van g neer as g die refleksie is van f in die y-as.

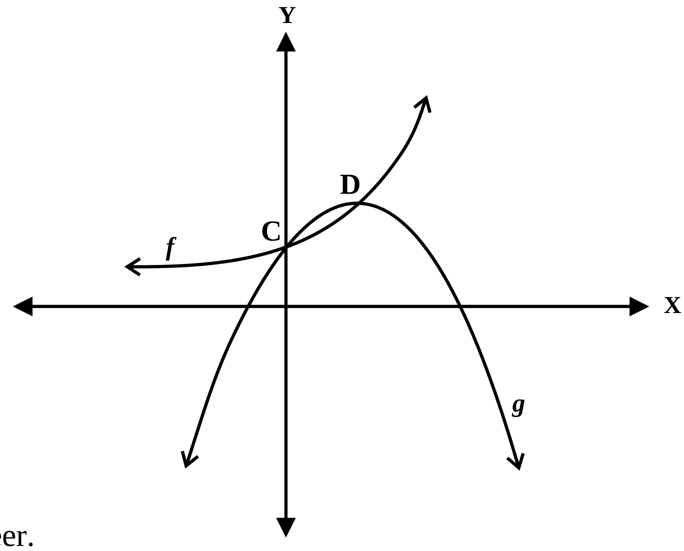
(g) Skryf die vergelyking van h neer as h die refleksie is van f^{-1} in die x-as.

(h) Is g en h mekaar se inverse? Motiveer jou antwoord.

(i) Vir watter waardes van x sal $f^{-1}(x) \geq 0$?

(j) Bereken: $f^{-1}(2) + f(-2)$

(6) Langsaan is die grafieke van $f(x) = 2^x$ en $g(x) = -(x - 1)^2 + b$ geskets, waar b 'n konstante is. Die grafieke van f en g sny die y-as by C.
D is die draaipunt van g.



(a) Dui aan dat $b = 2$.

(b) Skryf die koördinate van die draaipunt van g neer.

(c) Skryf die vergelyking van $f^{-1}(x)$ in die vorm $y = \ldots\ldots.$ neer.

(d) Skets die grafiek van f^{-1} op die grafiek hierbo.
Dui op jou grafiek die x-afsnit en die koördinate van een ander punt aan.

(e) Skryf die vergelyking van h neer indien $h(x) = g(x + 1) - 2$.

(f) Hoe kan die definisieversameling (gebied) van h beperk word sodat h^{-1} 'n funksie sal wees?

(g) Bepaal die maksimum waarde van $2^{2 - (x-1)^2}$.

HERSIENING UIT OU VRAESTELLE:

Oefening A:

Beskou die funksie $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(1) Is f ′n stygende of ′n dalende funksie? Gee ′n rede vir jou antwoord. (2)

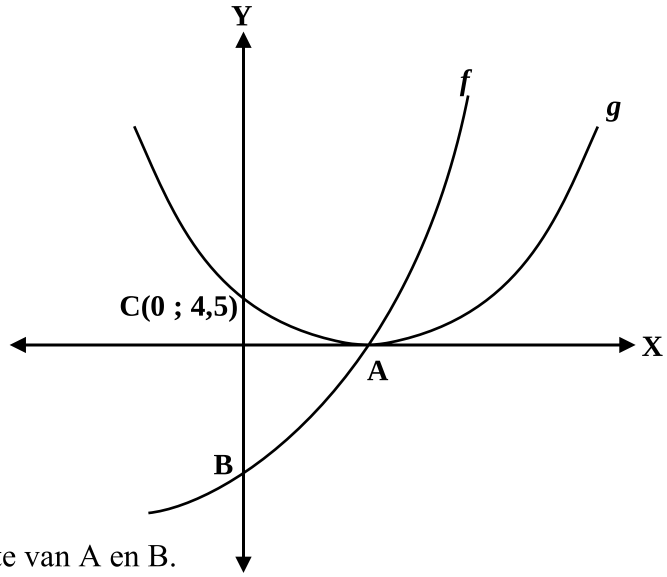
(2) Bereken $f^{-1}(x)$ in die vorm $y =$ …….. (2)

(3) Skryf die vergelyking neer van $f(x) - 5$ se asimptoot. (1)

(4) Beskryf die transformasie van f na g as $g(x) = \log_3 x$. (2)

Oefening B:

Die grafieke van $f(x) = 2^x - 8$ en $g(x) = ax^2 + bx + c$ is hieronder geteken. B en C(0 ; 4,5) is die y-afsnitte van die grafieke van f en g onderskeidelik. Die twee grafieke sny by A, wat die draaipunt van die grafiek van g en die x-afsnit van die grafieke van f en g.



(1) Bepaal die koördinate van A en B. (4)

(2) Skryf die vergelyking van die asimptoot van die grafiek van f neer. (1)

(3) Bepaal die vergelyking van h as $h(x) = f(2x) + 8$. (2)

(4) Bepaal die vergelyking van h^{-1} in die vorm $y =$ ….. (2)

(5) Skryf die vergelyking van p neer, as p die refleksie van h^{-1} om die x-as is. (1)

(6) Bereken $\sum_{k=0}^{3} g(k) - \sum_{k=4}^{5} g(k)$. Toon ALLE berekenings. (4)

<u>Oefening C</u>:

Gegee: $f(x) =$

3^x

(1) Bepaal 'n vergelyking vir f^{-1} in die vorm $f^{-1}(x) = ...$ (1)

(2) Skets die grafieke van f en f^{-1}, en toon ALLE snypunte met die asse duidelik aan. (4)

(3) Skryf die definisieversameling van f^{-1} neer. (2)

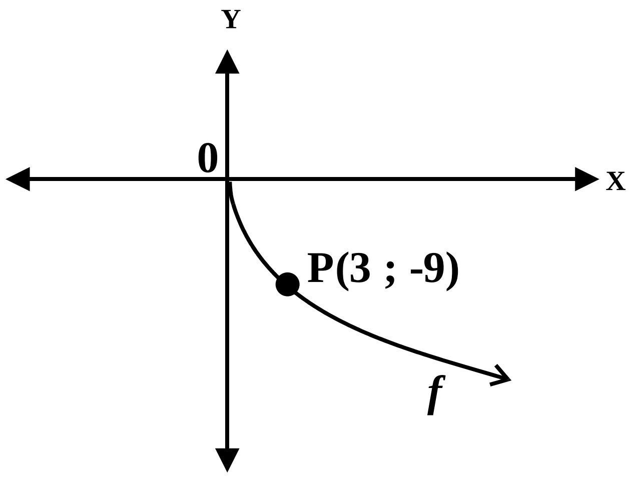
(4) Vir watter waardes van x sal $f(x).f^{-1}(x) \leq 0$ wees? (2)

(5) Skryf die waardeversameling van $h(x) = 3^{-x} - 4$ neer. (2)

(6) Skryf 'n vergelyking van g neer as die grafiek van g die beeld van die grafiek van f is nadat f twee eenhede na regs getransleer is en om die x-as gereflekteer is. (2)

<u>Oefening D</u>:

Die grafiek van $f(x) = -\sqrt{27x}$ vir $x \geq 0$ is hieronder geskets.
Die punt P$(3\ ;\ -9)$ lê op die grafiek van f.



(1) Gebruik die grafiek om die waardes van x te bepaal waarvoor $f(x) \geq -9$. (2)

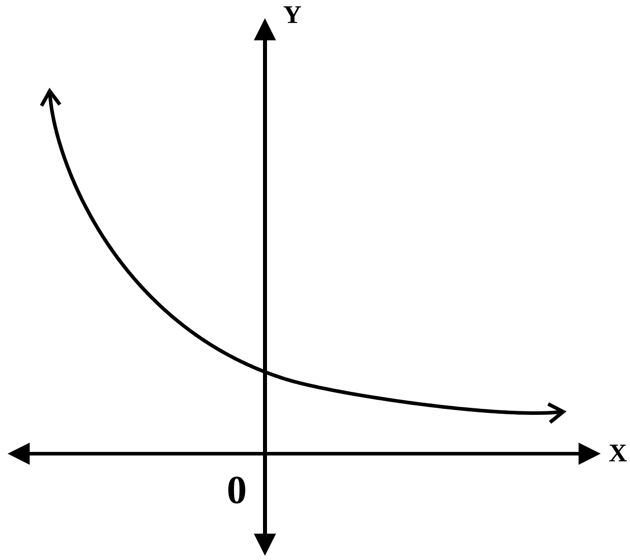
(2) Skryf die vergelyking van f^{-1} neer in die vorm $y = \ldots$.. (3)
Dui ALLE beperkings aan.

(3) Skets f^{-1}, die inverse van f. Dui die afsnitte met die asse en die koördinate van EEN ander punt duidelik aan op die skets. (3)

(4) Beskryf die transformasie van f na g as $g(x) = \sqrt{27x}$ vir $x \geq 0$. (1)

Oefening E:

Die grafiek van $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
is langsaan geskets.



(1) Skryf die definisieversameling van f neer. (1)

(2) Skryf die vergelyking van die asimptoot van f neer. (1)

(3) Skryf die vergelyking van f^{-1} in die vorm $y = \ldots..$ neer. (2)

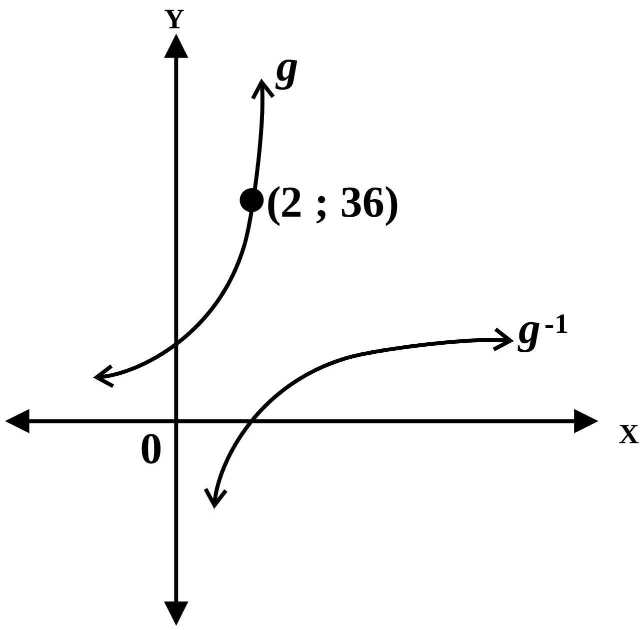
(4) Skets die grafiek van f^{-1}. Dui die x-afsnit en EEN ander punt aan. (3)

(5) Skryf die vergelyking van die asimptoot van $f^{-1}(x+2)$ neer. (2)

(6) Bewys dat: $[f(x)]^2 - [f(-x)]^2 = f(2x) - f(-2x)$ vir alle waardes van x. (3)

Oefening F:

Die grafieke van $g(x) = k^x$,
waar $k > 0$ en $y = g^{-1}(x)$ is
langsaan geskets.
Die punt $(2\,;\,36)$ is 'n punt op g.



(1) Bepaal die waarde van k. (2)

(2) Gee die vergelyking van g^{-1} in die vorm $y = \ldots\ldots$ (2)

(3) Vir watter waarde(s) van x is $g^{-1}(x) \leq 0$? (2)

(4) Skryf die definisieversameling van h neer, indien $h(x) = g^{-1}(x-3)$. (1)

(5) Skets die grafiek van die inverse van $y = 1$. (2)

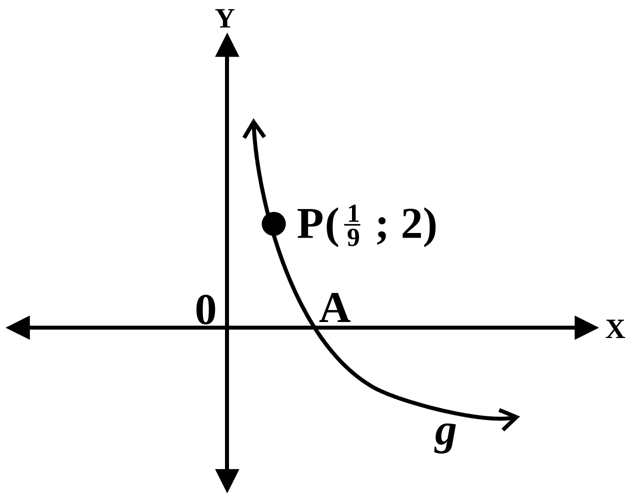
(6) Is die inverse van $y = 1$ 'n funksie? Motiveer jou antwoord. (2)

<u>Oefening G</u>:

Gegee die grafiek van $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

A is die x-afsnit van g.

$P\left(\frac{1}{9}\,;2\right)$ is 'n punt op g.



(1) Skryf die koördinate van A neer. (1)

(2) Skets die grafiek van g^{-1} en dui 'n afsnit met die asse aan sowel as EEN ander punt wat op die grafiek sal lê. (3)

(3) Skryf die definisieversameling van g^{-1} neer. (1)