

# **Graad 12 – Boek D**

**(Eerste KABV uitgawe)**

## **INHOUD:**

### **Bladsy:**

D1. Analitiese meetkunde	3
D2. Euklidiese meetkunde	91

Hierdie boek is opgestel en verwerk deur E.J. Du Toit in 2023.

Webtuiste: [www.abcbooks.co.za](http://www.abcbooks.co.za)

Kopiereg © 2023. Alle kopiereg word voorbehou. Geen deel van hierdie publikasie mag in enige vorm gereproduseer word nie; tensy skriftelike toestemming daarvoor verkry is.

**MET SPESIALE DANK EN ERKENNING AAN DIE DEPARTEMENT VAN ONDERWYS VIR DIE GEBRUIK VAN UITTREKSELS UIT OU VRAESTELLE.**

ISBN 978-1-928336-54-9

Besoek ook [www.abcmathsandscience.co.za](http://www.abcmathsandscience.co.za) vir ekstra oefeninge, toetse en vraestelle.



# Hoofstuk D1

## Analitiese Meetkunde

### D1.1 Hersiening graad 10 en 11:

**Gradiënt van 'n reguitlyn deur punte P en Q:**  $m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

**Toepassings van gradiënt:**

- \* Ewewydige lyne het dieselfde gradiënt  $\rightarrow (m_1 = m_2)$ .
- \* Lyne wat loodreg is op mekaar se gradiënte het 'n produk van  $-1 \rightarrow (m_1 \times m_2 = -1)$ .
- \* Die inklinasie hoek van 'n reguitlyn word verkry deur  $\tan \theta = m$ .
- \* Lyne met positiewe gradiënte lê almal in een rigting en is stygend (inklinasie hoek is 'n skerphoek) en lyne met negatiewe gradiënte almal in 'n ander rigting en is dalend (inklinasie hoek is 'n stomphoek)!
- \* Kollineêre punte of punte wat saamlynig het dieselfde gradiënt.

**Afstand tussen enige twee punte:**  $d(PQ) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

**Middelpunt van 'n lynstuk PQ:**  $M(x_M; y_M) = \left( \frac{x_P + x_Q}{2}; \frac{y_P + y_Q}{2} \right)$

**Vergelyking van 'n reguitlyn:**  $y = mx + c$  of  $y - y_1 = m(x - x_1)$

Oefening 1:

Datum: \_\_\_\_\_

(1) Gegee: R(1 ; 1), S(-1 ; 0), T(2 ; -2) en V(4 ; -1)

(a) Bewys dat RSTV 'n parallelogram is deur gebruik te maak van die gradiënt formule.

---



---



---



---



---



---



---



- (b) Bereken die koördinate van die snypunt van die diagonale van die parallelogram.

---

---

---

---

- (c) Bepaal die verhouding tussen die sylengtes van die parallelogram.

---

---

---

---

---

---

- (d) Bereken die grootte van  $\widehat{SRV}$ , afgerond tot een desimaal.

---

---

---

---

---

---

---

---

- (2)  $A(-1 ; 3)$ ,  $B(3 ; 5)$  en  $C(7 ; 7)$

- (a) Is A, B en C kollineêr? Toon alle bewerkings.

---

---

---



(b) Toon aan dat  $AB = BC$ .

---



---



---



---



---

(c) Is B die middelpunt van lynstuk AC? Motiveer jou antwoord.

---

(3)  $A(-4; -2)$ ,  $B(-1; -5)$  en  $C(x; 2)$

(a) Bereken die gradiënt van AB.

---



---

(b) Skryf die gradiënt van BC neer.

---

(c) Bereken nou die waarde van  $x$ .

---



---

(d) Indien  $BC = \sqrt{98}$ , bereken die omtrek en oppervlakte van  $\triangle ABC$ . Laat jou antwoord in die eenvoudigste wortelvorm.

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



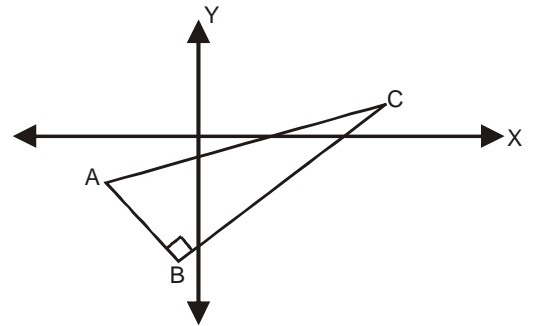
---



---



---











(5)  $A(2; 4)$ ,  $B(-4; -2)$  en  $C(4; -4)$  is die hoekpunte van  $\Delta ABC$ .

- (a) Bepaal die koördinate van P en Q as P en Q die middelpunte is van onderskeidelik AB en AC.

---



---



---



---



---



---

- (b) Bewys dat  $PQ \parallel BC$ .

---



---



---

- (c) Bewys dat  $PQ = \frac{1}{2} BC$ .

---



---



---



---



---



---

- (d) Bereken die grootte van  $\theta$  tot die naaste graad.

---



---



---



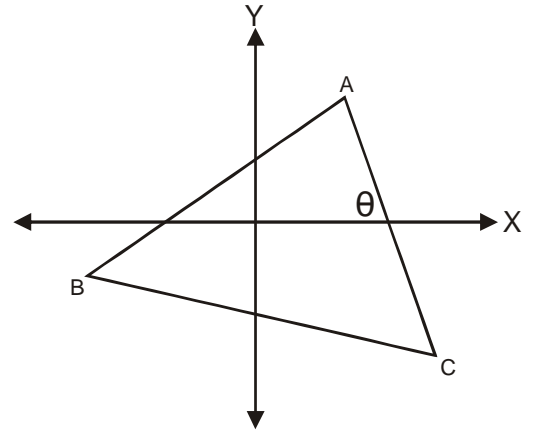
---



---



---





(6)  $P(0; 2)$ ,  $Q(2; 5)$ ,  $R(-1; 3)$  en  $S$  is die hoekpunte van parallelogram PQRS.

(a) Bereken die gradiënt van lyn QR.

---

---

(b) Bepaal die vergelyking van lyn PS.

---

---

(c) Toon aan dat PQRS 'n ruit is.

---

---

---

---

---

---

---

---

(d) Bereken die koördinate van die punt waar die diagonale van PQRS mekaar sny.

---

---

---

---

(7) TWK is 'n gelykbenige driehoek met  $TW = WK$ .  
 $T(7; 8)$ ,  $W(1; 6)$  en  $K(-1; y)$ .

(a) Bereken die lengte van TW.

---

---

---

---

---



(b) Bereken die waarde(s) van  $y$ .

---



---



---



---



---



---



---



---

(c) Bepaal die vergelyking van die:

(i) swaartelyn deur T vir

---



---



---



---

(ii) hoogtelyn deur W vir

---



---



---



---

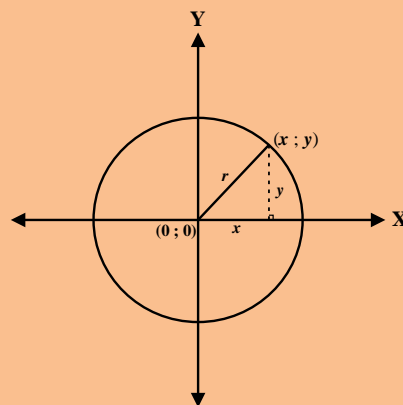
## D1.2 Sirkels:

### D1.2.1 Sirkels met oorsprong as middelpunt:

Die vergelyking van 'n sirkel met middelpunt  $(0 ; 0)$ :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

met  $(x ; y)$  enige punt op die omtrek van die sirkel en  $r$  die radius van die sirkel.



## D1.2.2 Ander sirkels:

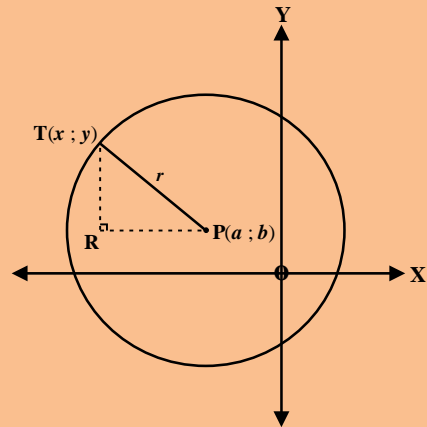
Die vergelyking van 'n sirkel met middelpunt  $(a ; b)$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

met  $(x ; y)$  enige punt op die omtrek van die sirkel en  $r$  die radius van die sirkel.

Die radius kan bereken word met die afstandsvormule:

$$d(PT) = \sqrt{(x_P - x_T)^2 + (y_P - y_T)^2}$$



**Vb. 1 Bepaal die koördinate van die middelpunt en die lengte van die radius van die volgende sirkel:**

$$x^2 + 6x + y^2 - 4y = 12$$

**Gebruik vierkantsvoltooiing om die vergelyking van die sirkel in standaardvorm  $[(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2]$  te skryf:**

$$x^2 + 6x + y^2 - 4y = 12$$

$$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + y^2 - 4y + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 12 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 6x + (3)^2 + y^2 - 4y + (-2)^2 = 12 + 9 + 4$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

$$\therefore \text{MP} = (-3 ; 2) \quad \text{en} \quad r^2 = 25$$

$$\therefore r = 5$$

**Vb. 2 Bepaal die vergelyking van die sirkel met middelpunt  $(-2 ; 5)$  deur die punt  $(1 ; -1)$ .**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{met MP} = \begin{matrix} a & b \\ (-2 & 5) \end{matrix}$$

$$\therefore (x - (-2))^2 + (y - 5)^2 = r^2$$

$$\therefore (1 + 2)^2 + (-1 - 5)^2 = r^2 \quad \text{deur } \begin{matrix} x & y \\ (1 & -1) \end{matrix}$$

$$\therefore (3)^2 + (-6)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 9 + 36 = 45$$

$$\therefore (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 45$$



Oefening 2:

Datum: \_\_\_\_\_

(1) Bepaal die vergelykings van die volgende sirkels:

(a) met middelpunt (5 ; 2) en radius 6.

---



---



---

(b) met middelpunt (-1 ; 3) en radius  $\sqrt{12}$ .

---



---



---

(c) met middelpunt (4 ; -2) en deur die punt (-2 ; 0).

---



---



---

(d) met middelpunt (-2 ; -3) en deur die punt (2 ; -1).

---



---



---

(2) Bepaal die koördinate van die volgende sirkels se middelpunte en die lengte van die radius:

(a)  $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 36$  \_\_\_\_\_(b)  $x^2 + y^2 - 10y = 6$   


---



---

(c)  $(x + 3)^2 + (y + 6)^2 = 20$  \_\_\_\_\_(d)  $(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 280$  \_\_\_\_\_(e)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$  \_\_\_\_\_



(f)  $x^2 + (y - 4)^2 = 100$  \_\_\_\_\_

(g)  $x^2 - 8x + y^2 - 6y = 12$

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(h)  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = 48$  \_\_\_\_\_

(i)  $(x - 6)^2 + y^2 = 1$  \_\_\_\_\_

(j)  $2x^2 + 2y^2 - 4x - y = 2$

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- (3) Bepaal of die punt  $(3 ; -2)$  op die sirkel met middelpunt  $(-1 ; 5)$  sal lê.  
Die radius van die sirkel is 8.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- (4) Die vergelyking van die sirkel deur die punt  $(-3 ; -1)$  is  $x^2 + 10x + y^2 - 2y + p = 0$ .
- (a) Bepaal die koördinate van die middelpunt van die sirkel.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- (b) Bereken die waarde van  $p$ .

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



- (5) Bepaal die vergelyking van die sirkel met middelpunt  $(-4 ; -3)$  en deursnee 18.

---



---



---

- (6) CD is die middellyn van 'n sirkel met T die middelpunt van CD. Bereken:

- (a) die koördinate van die sirkel se middelpunt.

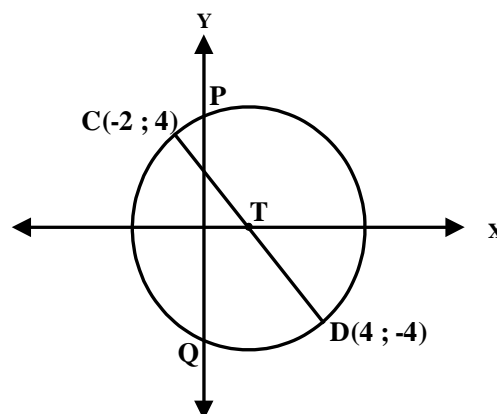
---



---



---



- (b) die vergelyking van die sirkel.

---



---



---



---

- (c) die lengte van PQ as P en Q die  $y$ -afsnitte van die sirkel is.

---



---



---

- (d) die vergelyking van middellyn CD.

---



---



---



---



---



---