Graad 11 – Handboek

(CAPS Uitgawe)

INHOUD:

Bladsy:

Hierdie boek is opgestel en verwerk deur E.J. Du Toit in 2008.
Caps uitgawe in 2012.

Kontak nommer: 086 618 3709 (Faks!)

ISBN 978-1-919957-80-7

Hoofstuk A1

Getallestelsels en eksponente

A1.1 Getallestelsels:

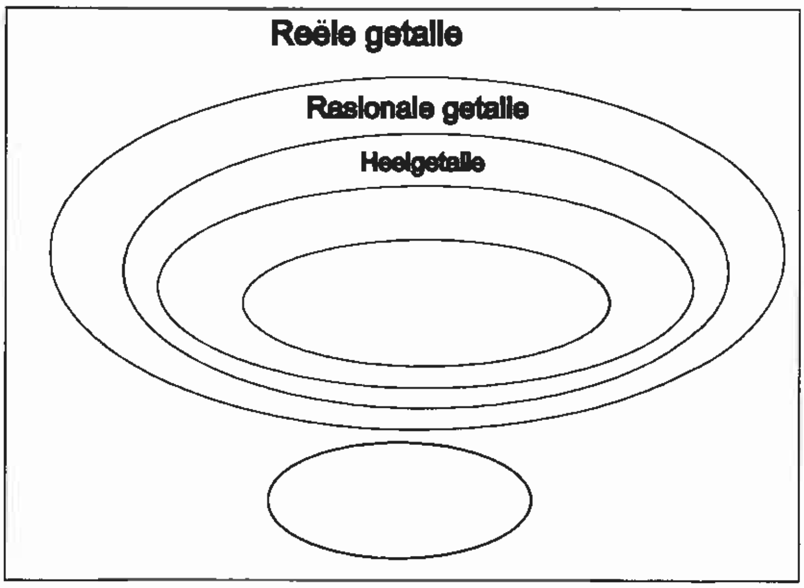
Oefening 1:

(1) Voltooi:
* Natuurlike getalle: $\mathbb{N}$ = ______________________
* Telgetalle: $\mathbb{N}_0$ = ______________________
* Heelgetalle: $\mathbb{Z}$ = ______________________
* Rasionale getalle: $\mathbb{Q}$ = ______________________
* Reële getalle: $\mathbb{R}$ = ______________________

(2) Gee drie voorbeelde van Irrasionale getalle.

(3) Beskou: $x(x - 6)(x^2 - 5)(2x^2 + x - 3) = 0$.
Los op vir x en skryf die waarde(s) van x waarvoor die oplossing van die uitdrukking:
(a) irrasionale wortels het.
(b) natuurlike wortels het.
(c) heelgetallige wortels het.

(4) Voltooi die volgende figuur wat die samestelling van die stelsel reële getalle verteenwoordig. Teken dit oor in jou skrif.



A1.2 Nie-Reële getalle:

Voorbeelde van nie-reële getalle is: $\sqrt{-2}$; $\sqrt{-9}$ of $\sqrt[4]{-5}$
Maar nie $\sqrt[3]{-8}$ nie, want $-2 \times -2 \times -2 = -8$ $\therefore \sqrt[3]{-8} = -2$

Oefening 2:

(1) Bepaal of die volgende getalle reël of nie-reëel is. Indien dit reëel is, dui aan of die getal rasionaal of irrasionaal sal wees.

(a) 7 (b) $-\sqrt{3}$

(c) π (d) $\sqrt{-16}$

(e) $0,\dot{3}$ (f) $\frac{12}{36}$

(g) $\sqrt[3]{-125}$ (h) $1 + \sqrt{9}$

(i) $\sqrt{(-2)^3}$ (j) 0

(2) Sê of die volgende bewerings waar of vals is:
(a) Die produk van twee heelgetalle is altyd weer 'n heelgetal.

(b) Die produk van twee irrasionale getalle is altyd weer 'n irrasionale getal.

(c) As m 'n natuurlike getal is, dan sal $\sqrt{4}\,m$ ook 'n natuurlike getal wees.

(d) Die verskil tussen twee rasionale getalle is altyd weer 'n rasionale getal.

(e) Die kwosiënt van 'n rasionale getal en 'n irrasionale getal is altyd rasionaal.

(3) Vir watter waardes van x is die volgende bewerings: (i) ongedefinieerd (ii) nie-reëel

(a) $\dfrac{x+3}{x}$ (b) $\sqrt{x-1}$ (c) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$

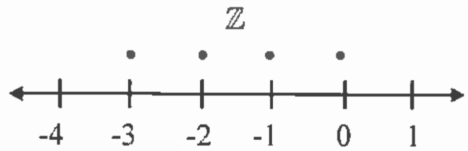
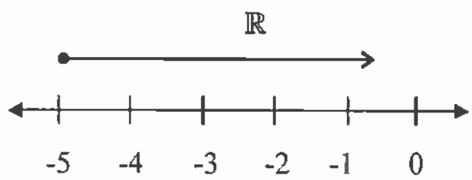
(4) Gegee: $P = \sqrt[4]{3y} - 1$. Tot watter van die volgende getallestelsel(s) sal P behoort indien:
[Getallestelsels: $\mathbb{N}$; $\mathbb{N}_0$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}'$; $\mathbb{R}$ of $\mathbb{R}'$]
(a) $y = \frac{1}{3}$ (b) $y = -1$ (c) $y = 5$

A1.3 Voorstelling van die reële getalle:

Soos reeds gesien in die vorige grade, kan die reële getalle op een van die volgende maniere voorgestel word:
(a) Intervalnotasie
(b) Op 'n getallelyn.
(c) As ongelykhede in versameling keurdernotasie. Onthou die volgende simbole:
$\cup$ $\rightarrow$ die vereniging van twee of meer intervalle of versamelings.
$\cap$ $\rightarrow$ die snyding tussen twee of meer intervalle of versamelings.

Oefening 3:

Teken die tabel oor en voltooi:

	Versamelingskeurdernotasie:	Intervalnotasie:	Getallelyn:
(1)	$\{x\,/\,-1 < x \leq 2\,;\,x \in \mathbb{R}\}$		
(2)		$x \in [-2\,;\,5]$	
(3)		$y \in (-\infty\,;\,3]$	
(4)			
(5)	$\{y\,/\;\; y \geq 3\,;\,y \in \mathbb{N}\}$		
(6)		$m \in (0\,;\,4]$	
(7)			
(8)	$\{m : m \leq 6\,;\,m \in \mathbb{R}\}$		
(9)	$\{x\,/\,-1 < x < 2\,;\,x \in \mathbb{Z}\}$		
(10)		$x \in (-1\,;\,\infty)$	

☺ **(1) Gee 'n sinoniem vir "nie-reële getalle".**

(2) Doen navorsing oor komplekse getalle en gee twee voorbeelde van komplekse getalle.

A1.4 Eksponente en wortelvorme:

A1.4.1 Eksponente:

Basiese eksponentwette en eienskappe:

(1) $x^m \times x^n = x^{m+n}$ (2) $x^m \div x^n = x^{m-n}$

(3) $(x^m)^n = x^{mn}$ (4) $(xy)^m = x^m y^m$ of $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$

(5) $x^0 = 1$ (6) $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$

(7) $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ *(m,n ∈ $\mathbb{Z}$ en n > 0 met n ≠ 1)*

Vb. 1 *Vereenvoudig en skryf jou antwoord as 'n positiewe eksponent:*

(a) $$\frac{(x^3 \,.\, y^{-2})^2}{x^3(xy)^3} = \frac{x^6 \,.\, y^{-4}}{x^3 \,.\, x^3 \,.\, y^3} = \frac{x^6 \,.\, y^{-4}}{x^6 \,.\, y^3} = x^{6-6} \,.\, y^{-4-3} = x^0 \,.\, y^{-7} = \frac{x^0}{y^7} = \underline{\frac{1}{y^7}}$$

(b) $$\sqrt{x} \times x^{\frac{1}{3}} \div x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}} \div x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{6+4-3}{12}} = \underline{x^{\frac{7}{12}}}$$

(c) $$\frac{25^{n+1} \,.\, 10^n}{8^{n-1} \,.\, 5^{3n} \,.\, (2^{-1})^{2n}} = \frac{(5^2)^{n+1} \,.\, (2 \times 5)^n}{(2^3)^{n-1} \,.\, 5^{3n} \,.\, 2^{-2n}}$$

$$= \frac{5^{2n+2} \,.\, 2^n \,.\, 5^n}{2^{3n-3} \,.\, 5^{3n} \,.\, 2^{-2n}} = \frac{5^{3n+2} \,.\, 2^n}{2^{n-3} \,.\, 5^{3n}}$$

$$= 5^{3n+2-3n} \,.\, 2^{n-(n-3)} = 5^2 \,.\, 2^{n-n+3} = \underline{5^2 \,.\, 2^3} = \underline{200}$$

(d) $$\frac{2^x - 2^{x+1}}{2^{x-1} + 2^x}$$

$$= \frac{2^x - 2^x \,.\, 2^1}{2^x \,.\, 2^{-1} + 2^x}$$

$$= \frac{\cancel{2^x}(1 - 2^1)}{\cancel{2^x}(2^{-1} + 1)} = \frac{1-2}{\frac{1}{2}+1} = -1 \div \left(\frac{1+2}{2}\right) = -1 \div \frac{3}{2} = -1 \times \frac{2}{3} = \underline{\frac{-2}{3}}$$

(e) $$\frac{x - x^{\frac{1}{2}} - 6}{x - 4} = \frac{(x^{\frac{1}{2}} - 3)\cancel{(x^{\frac{1}{2}} + 2)}}{(x^{\frac{1}{2}} - 2)\cancel{(x^{\frac{1}{2}} + 2)}} = \underline{\frac{(x^{\frac{1}{2}} - 3)}{(x^{\frac{1}{2}} - 2)}}$$

<u>Oefening 4</u>:

Vereenvoudig, sonder 'n sakrekenaar: (Skryf antwoorde as positiewe eksponente!)

(1) $(125x^6)^{\frac{1}{3}}$ (2) $\left(x^{\frac{1}{2}} - 2\right)^2$

(3) $\sqrt[3]{-8x^9y^{-3}}$

(4) $3y^{\frac{1}{2}} \div (3y)^{\frac{-1}{2}}$

(5) $(0{,}25m^{\frac{1}{4}})^2$

(6) $\left(x^{\frac{1}{2}} + 4\right)\left(x^{\frac{1}{4}} - 2\right)\left(x^{\frac{1}{4}} + 2\right)$

(7) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} . \sqrt{x^3}}{x^{\frac{1}{3}}}$

(8) $\left(\dfrac{-12\, x^4\, y^4\, z}{-3\, x^2\, z^3}\right)^{\frac{1}{2}}$

(9) $\dfrac{m^{-2} - 3}{m^{-3} - 3m^{-1}}$

(10) $\dfrac{\left(9x^{\frac{2}{3}}y^{-4}\right)^{\frac{-3}{2}}}{3xy}$

(11) $\dfrac{(x + y)^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$

(12) $\dfrac{2^{2n} - 3.2^n + 2}{2^n - 2}$

(13) $\left(m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{1}{3}}\right)^2$

(14) $\left(a^{\frac{1}{3}} - 5\right)\left(5 + a^{\frac{1}{3}}\right)$

(15) $\sqrt[3]{(0{,}125)^{-2}} + \left(125^2\right)^{\frac{1}{3}}$

(16) $\dfrac{12^{n+1} \;.\; 9^{n-2}}{18^{2n-1} . 3^{-n}}$

(17) $\dfrac{5^{n+1} \;.\; 25^{n-1}}{125^{n-2}}$

(18) $\dfrac{3^{2n} - 9^{n+1}}{3^{2n}}$

(19) $\dfrac{3 \times 2^x + 2^{x+1}}{5 \times 2^x}$

(20) $\dfrac{3^2 . 5^0 . 4^{n-1}}{2^{2n+1} - 2^{2n}}$

(21) $\dfrac{3^{-2x} . 36^{x+1} \;.\; 3}{4^{x-1} \;.\; (0{,}5)^2}$

(22) $\dfrac{5 . 5^{-y-1} + 5^{-2y} . 5^y}{3 . 5^{-y} - 5^{1-y}}$

A1.4.2 <u>Wortelvorme</u>:

Onthou: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ $(m,n \in \mathbb{Z}$ en $n \geq 2)$

Vb.2 Vereenvoudig: *(a)* $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = \underline{10\sqrt{2}}$

(b) $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = \underline{4}$

(c) $\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 = \left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right) = 3 + 1\sqrt{3} + 1\sqrt{3} + 1$

$= \underline{4 + 2\sqrt{3}}$

$$
\begin{aligned}
(d)\quad & \sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{8} \\
&= \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{25 \times 2} - 2\sqrt{4 \times 2} \\
&= \sqrt{9} \times \sqrt{2} + \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{4} \times \sqrt{2} \\
&= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2 \times 2\sqrt{2} \\
&= 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \\
&= \underline{4\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Vb.3 Rasionaliseer die noemer: $\dfrac{2 + \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2 + \sqrt{8}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2 \times \sqrt{2} + \sqrt{8} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{2\sqrt{2} + 4}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{2} = \underline{\sqrt{2} + 2}
\end{aligned}
$$

<u>Oefening 5</u>:

(1) Vereenvoudig, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

(a) $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)$ (b) $\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{18}$ (c) $\left(\sqrt{8} - 2^{\frac{1}{2}}\right)^2$

(d) $\sqrt[3]{27x^6} + \sqrt[5]{32x^{10}}$ (e) $(4\sqrt{2} - 3)^2$

(f) $m \times \sqrt{27m^6} - \sqrt{12m^8}$ (g) $\sqrt{3}\left(\sqrt{48} - 3\sqrt{75} + 2\sqrt{108}\right)$

(h) $\dfrac{\sqrt{18} - \sqrt{98}}{\sqrt{200}}$ (i) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{64}} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{27}}$

(j) $\dfrac{(2 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})}{\sqrt{100} + \sqrt{48}}$ (k) $\dfrac{\sqrt[3]{27x^6} + \sqrt[4]{16x^8}}{\sqrt[3]{125x^{27}}}$

(2) Vereenvoudig, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.
Waar nodig, rasionaliseer die noemer.

(a) $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{\sqrt[3]{-8} - \sqrt[5]{32}}{\sqrt{72}}$ (c) $\dfrac{8\sqrt{5} - \sqrt{125}}{\sqrt{45}}$

A1.5 HERSIENINGSOEFENING:

(1) Beskou P = $\{-1\ ;\ \sqrt{8}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 101\ ;\ \sqrt[3]{125}\ ;\ 0{,}13526\ldots\ ;\ \frac{-3}{4}\ ;\ 5{,}6\dot{7}\ ;\ 0\ ;\ \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}\ ;\ \sqrt{-100}\ \}$

Skryf die getalle in versameling P neer wat tot die volgende getallestelsel behoort:

(a) Natuurlike getalle (b) $\mathbb{Z}$

(c) Irrasionale getalle (d) $\mathbb{R}'$

(2) As $C = \sqrt{\dfrac{4-x}{-10x}}$, beskryf die waarde van C as reeël / nie - reeël en rasionaal / irrasionaal indien $x = -1$.

(3) Is die volgende bewerings waar of vals?

(a) $(-3)^2 = -3^2$ (b) $3^3 . 4^3 = 12^3$

(c) $8^x + 8^{2x} = 8^{3x}$ (d) $2^3 \times 2^5 = 4^4$

(e) $2^{-p} = (\frac{1}{2})^p$

(4) Bewys dat $\sqrt{10}$ tussen 3 en 4 lê, sonder om van 'n sakrekenaar gebruik te maak.

(5) Vereenvoudig die volgende, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

(a) $7m^{-2}n \times -2m^3n^4$ (b) $36^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{2}{3}} + 64^{\frac{-1}{6}} \div 7^0$

(c) $\sqrt{\sqrt[3]{27}} \times \sqrt{12}$ (d) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

(e) $\dfrac{15^{2n+1} . 9^{-n}}{25^n . 3^{1-n}}$ (f) $\left(\dfrac{9x^2y^{-4}}{z^6}\right)^{\frac{1}{2}} \div \dfrac{(8x^3)^{\frac{2}{3}}}{4(z^{-1}y^{-1})^3}$

(g) $\dfrac{2.5^m - 100.5^{m-2}}{5^m + 5^{m+1}}$ (h) $\dfrac{(0{,}25)^x \times 32^{x+1}}{24^x \times 3^{-x}}$

(i) $\dfrac{\sqrt{48y^{16}} + \sqrt{27}\ y^{16}}{4 + 3y^8}$ (j) $\dfrac{3m.3^{3x-1} + m.27^x}{m^4 . 3^{4x} . (3^{-1})^x . m^{-3}}$

(6) As $\sqrt{2} = m$ en $\sqrt[3]{3} = n$, bewys dat: $\sqrt{32} + \sqrt{18} + \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{4} - \sqrt{72} = m + 2n$

****

Hoofstuk A2

Algebraïese uitdrukkings en vergelykings

A2.1 Vereenvoudiging van breuke:

Vb.1 Vereenvoudig:

(a) $\dfrac{2x^2 - 4x - 16}{4 - x^2}$ (b) $\dfrac{(y+2)^2 - y - 2}{y+1}$

****

$$= \frac{2(x^2 - 2x - 8)}{-(x^2 - 4)}$$

$$= \frac{2(x-4)\cancel{(x+2)}}{-(x-2)\cancel{(x+2)}}$$

$$= \frac{2(x-4)(x+2)}{-(x-2)(x+2)}$$

$$= \underline{\frac{-2(x-4)}{(x-2)}}$$

$$= \frac{(y+2)^2 - 1(y+2)}{(y+1)}$$

$$= \frac{(y+2)(y+2-1)}{(y+1)}$$

$$= \frac{(y+2)\cancel{(y+1)}}{\cancel{(y+1)}}$$

$$= \underline{y+2}$$

Oefening 1:
Vereenvoudig: (Geen noemers is gelyk aan nul nie!)

(1) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$ (2) $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x-1}$

(3) $\dfrac{m^2 + 10m + 25}{2m^2 + 10m} \times \dfrac{m^2 - m}{m^2 + 4m - 5}$ (4) $\dfrac{p}{p^2 - 1} + \dfrac{3}{p^2 - p - 2}$

(5) $\dfrac{2(x-1)}{x^2 - 4} - \dfrac{3}{6 - x - x^2}$ (6) $\dfrac{y^3 - 4y}{6y^2} \div \dfrac{y^2 - 2y - 8}{y^2 - 4y}$

(7) $\dfrac{p^2 + 9}{p + 3} \times \dfrac{(p-3)^2}{p} \div \dfrac{p^4 - 81}{1}$ (8) $\dfrac{2}{m^2 + 3m + 2} + \dfrac{m}{m^2 - 4} + 3$

A2.2 Vergelykings met breuke:

*** Die verskil tussen 'n uitdrukking en 'n vergelyking:**

Algebraïese uitdrukking:

$$\frac{x-1}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$$

$$\therefore \quad \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)}$$

KGV = $x(x+2)(x-2)$ $\quad\therefore\ x \neq 0\ ;\ x \neq -2$ en $x \neq 2$

$$\therefore \quad \frac{x(x-1)+2(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2-x+2x+4}{x(x+2)(x-2)}$$

$$\therefore \quad \underline{\frac{x^2+x+4}{x(x+2)(x-2)}}$$

Vergelyking:

$$\frac{x-1}{x^2-4} = \frac{2}{x^2-2x}$$

$$\therefore \quad \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{2}{x(x-2)}$$

$$\therefore \quad \frac{(x-1)}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}} \times \frac{x\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}{1} = \frac{2}{\cancel{x}\cancel{(x-2)}} \times \frac{\cancel{x}(x+2)\cancel{(x-2)}}{1}$$

$$\therefore \quad x(x-1) = 2(x+2)$$

$$\therefore \quad x^2 - x = 2x + 4$$

$$\therefore \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\therefore \quad (x-4)(x+1) = 0$$

$$\therefore \quad \underline{x = 4} \quad \text{of} \quad \underline{x = -1}$$

Vb.2 Los op vir x: $\quad \dfrac{2x-3}{x^2+6x+8} - \dfrac{x-4}{x^2+3x-4} = \dfrac{3x+8}{x^2+x-2}$

****

$$\frac{2x-3}{(x+2)(x+4)} - \frac{x-4}{(x+4)(x-1)} = \frac{3x+8}{(x+2)(x-1)}$$

KGV $= (x+2)(x+4)(x-1) \quad \therefore\ x \neq -2 \quad ; \quad x \neq -4 \quad$ *en* $\quad x \neq 1$

$$\frac{(2x-3)}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x+4)}} \times \frac{\cancel{(x+4)}\cancel{(x+2)}(x-1)}{1} - \frac{(x-4)}{\cancel{(x+4)}\cancel{(x-1)}} \times \frac{\cancel{(x+4)}(x+2)\cancel{(x-1)}}{1} = \frac{(3x+8)}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}} \times \frac{(x+4)\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}}{1}$$

$$\therefore \quad (2x-3)(x-1) - (x-4)(x+2) = (3x+8)(x+4)$$

$$2x^2 - 2x - 3x + 3 - (x^2 + 2x - 4x - 8) = 3x^2 + 12x + 8x + 32$$

$$2x^2 - 5x + 3 - x^2 - 2x + 4x + 8 = 3x^2 + 20x + 32$$

$$x^2 - 3x + 11 = 3x^2 + 20x + 32$$

$$0 = 3x^2 + 20x + 32 - x^2 + 3x - 11$$

$$0 = 2x^2 + 23x + 21$$

$$0 = (2x+21)(x+1)$$

$$2x + 21 = 0 \quad \text{of} \quad x + 1 = 0$$

$$\underline{x = \tfrac{-21}{2}} \qquad \underline{x = -1}$$

Oefening 2:
Los die volgende vergelykings op:

(1) $x = \dfrac{5}{x - 4}$

(2) $\dfrac{y - 2}{y - 1} = \dfrac{2y - 1}{y + 7}$

(3) $\dfrac{m}{m + 1} = \dfrac{m - 2}{m + 3}$

(4) $1 - \dfrac{1}{p - 1} = \dfrac{p - 3}{p - 1}$

(5) $\dfrac{4}{x^2 - 4} - \dfrac{10}{x^2 - x - 6} = \dfrac{1}{x + 2}$

(6) $\dfrac{10}{y^2 - 2y - 8} + \dfrac{5}{y + 2} = -1$

(7) $\dfrac{y}{y - 1} = 2 + \dfrac{2}{1 - y} + \dfrac{2}{y + 1}$

(8) $\dfrac{6}{m^2 - 9} - \dfrac{1}{3 - m} = \dfrac{2m}{m + 3}$

(9) $\dfrac{3 - x}{x^2 + 6x + 5} = \dfrac{3}{x^2 + x} - \dfrac{2}{5 + x}$

(10) $\dfrac{2x}{3x - 6} - 1 = \dfrac{2(x + 1)}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x + 2}$

A2.3 Oplos van vergelykings mbv kwadrering of worteltrekking:

Vb.3 Los op vir x:

(a) $2(x + 3)^2 - 8 = 0$

(b) $2\sqrt{x + 1} + x - 2 = 0$

****

(a)
$$2(x + 3)^2 = 8$$
$$(x + 3)^2 = \tfrac{8}{2}$$
$$(x + 3)^2 = 4$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{4}$$
$$x + 3 = \pm 2$$
$x + 3 = 2$ of $x + 3 = -2$

$\underline{x = -1}$ $\qquad$ $\underline{x = -5}$

(b)
$$2\sqrt{x + 1} = 2 - x$$
$$\left(2\sqrt{x + 1}\right)^2 = (2 - x)^2$$
$$(2)^2\left(\sqrt{x + 1}\right)^2 = 4 - 4x + x^2$$
$$4(x + 1) = x^2 - 4x + 4$$
$$4x + 4 = x^2 - 4x + 4$$
$$0 = x^2 - 8x$$
$$0 = x(x - 8)$$
$x = 0$ of $x = 8$

TOETS:

$*LK = 2\sqrt{0 + 1} + 0 - 2$ $\qquad$ $RK = 0$

$= 2(1) - 2 = 0$

$\therefore\ LK = RK \quad \therefore \quad \underline{x = 0}$

$*LK = 2\sqrt{8 + 1} + 8 - 2$ $\qquad$ $RK = 0$

$= 2(3) - 6 = 0$

$\therefore\ LK = RK \quad \therefore \quad \underline{x = 8}$

Oefening 3:

Los op vir x: (waar nodig, laat jou antwoord in eenvoudigste wortelvorm.)

(1) $\sqrt{2x + 3} = 4$ (2) $(x - 1)^2 - 4 = 0$

(3) $\sqrt{x + 12} - x = 0$ (4) $\sqrt{x + 1} = x - 1$

(5) $x + 1 = \sqrt{2x + 5}$ (6) $x - \sqrt{x} = 2$

(7) $\sqrt{5 - 3x} = \sqrt{x + 1}$ (8) $4(x + 3)^2 - 16 = 9$

(9) $x - \sqrt{3 - 2x} = 0$ (10) $2\sqrt{1 - x} + 1 = x$

A2.4 K-metode / Substitusie:

Vb.4 Los op vir x: $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$

****

Ons eerste reaksie is gewoonlik om eers die hakies te verwyder:

$x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x^2 + 8x + 12 = 0$

Maar dan het ons 'n vierde graadse vergelyking om op te los! Dit kan ons nog nie doen nie!
Daarom beraam ons 'n ander plan naamlik substitusie of anders bekend as die k-metode:
Vervang elke $(x^2 - x)$ *met 'n k:* $\therefore$ *Stel* $(x^2 - x) = k$

$\therefore\ k^2 - 8k + 12 = 0$

$\therefore\ (k - 6)(k - 2) = 0$

$\therefore\ k - 6 = 0$ *of* $k - 2 = 0$

$\therefore\ x^2 - x - 6 = 0$ *of* $x^2 - x - 2 = 0$ *[vervang k weer met* $(x^2 - x)$*]*

$\therefore\ (x - 3)(x + 2) = 0$ $(x - 2)(x + 1) = 0$

$\therefore\ \underline{x = 3}$ *of* $\underline{x = -2}$ $\underline{x = 2}$ *of* $\underline{x = -1}$

Oefening 4:

Los die volgende vergelykings op:

(1) $(y^2 - 3y)^2 - 2(y^2 - 3y) = 8$ (2) $(x^2 - 5x)^2 = 36$

(3) $\dfrac{1}{x^2 - x - 1} = x^2 - x - 1$ (4) $4\left(m^2 - m\right) - 7 = \dfrac{2}{m^2 - m}$

(5) $\sqrt{x - 3} = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$ (6) $x^2 - 5x + 3 - \dfrac{9}{x^2 - 5x + 3} = 0$

(7) $(y^2 - 2y)^2 - 2y^2 + 4y - 3 = 0$ (8) $x^2 + x + 2 = \dfrac{-8}{x^2 + x - 4}$

A2.5 Vierkantsvoltooiing:

Die volgende is voorbeelde van volkome vierkante:
16 ; x^2 ; $(-y)^2$; $(x - 2)^2$; $(p + 5)^2$ ens.

Netso is $(x^2 - 8x + 16)$ 'n volkome vierkant want
$(x^2 - 8x + 16) = (x - 4)(x - 4) = (x - 4)^2$

$\therefore$ Enige uitdukking in die vorm $x^2 + bx$ kan as 'n volkome vierkant geskryf word indien die regte konstante waarde (c) bygetel word: $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Bv. $x^2 - 6x \rightarrow x^2 - 6x + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 - 6x + \mathbf{9} = (x - 3)^2 \rightarrow$ volkome vierkant!
of $x^2 + 9x \rightarrow x^2 + 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 - 6x + \mathbf{20{,}25} = (x + \frac{9}{2})^2 \rightarrow$ volkome vierkant!

Vb.5 Los op vir x deur gebruik te maak van vierkantsvoltooiing:
(a) $x^2 - 4x - 12 = 0$ *(b)* $2x^2 + 3x + 1 = 0$

****

(a)
$$x^2 - 4x = 12$$
$$x^2 - 4x + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2 = 12 + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2$$
$$x^2 - 4x + 4 = 12 + 4$$
$$(x - 2)^2 = 16$$
$$\sqrt{(x - 2)^2} = \pm\sqrt{16}$$
$$x - 2 = \pm 4$$
$$\therefore\ x - 2 = 4 \quad \textit{of} \quad x - 2 = -4$$
$$\underline{x = 6} \qquad \underline{x = -2}$$

(b)
$$2x^2 + 3x = -1$$
$$\frac{2x^2}{2} + \frac{3x}{2} = \frac{-1}{2}$$
$$x^2 + \tfrac{3}{2}x = \tfrac{-1}{2}$$
$$x^2 + \tfrac{3}{2}x + \left(\tfrac{3}{2} \div 2\right)^2 = \tfrac{-1}{2} + \left(\tfrac{3}{2} \div 2\right)^2$$
$$x^2 + \tfrac{3}{2}x + \left(\tfrac{3}{2} \times \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{-1}{2} + \left(\tfrac{3}{2} \times \tfrac{1}{2}\right)^2$$
$$x^2 + \tfrac{3}{2}x + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{-1}{2} + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$
$$\left(x + \tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{-1}{2} + \tfrac{9}{16}$$
$$\left(x + \tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{1}{16}$$
$$x + \tfrac{3}{4} = \pm\tfrac{1}{4}$$
$$\therefore\ x + \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4} \quad \textit{of} \quad x + \tfrac{3}{4} = -\tfrac{1}{4}$$
$$x = -\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} \qquad x = -\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}$$
$$\underline{x = \tfrac{-2}{4} = -\tfrac{1}{2}} \qquad \underline{x = \tfrac{-4}{4} = -1}$$

Oefening 5:

(1) Los telkens die onbekende op deur gebruik te maak van vierkantsvoltooiing:
[Waar nodig, laat die antwoord in eenvoudigste wortelvorm.]

(a) $x^2 + 8x - 9 = 0$ (b) $p^2 - 12p + 32 = 0$

(c) $x^2 + 2x + 7 = 0$ (d) $x^2 = 3x + 5$

(e) $(m - 4)(m + 2) = 6$ (f) $2y^2 + 12y + 2 = 0$

(2) Los telkens die onbekende op deur gebruik te maak van vierkantsvoltooiing:
[Waar nodig, rond korrek af tot een desimaal.]

(a) $2x(x - 10) = 4$ (b) $p^2 - 2p + 3 = 2p$

(c) $m^2 - 3m + 1 = 2m^2$ (d) $(2x + 1)(x - 1) = 2$

(3) Los op vir x deur gebruik te maak van vierkantsvoltooiing:

(a) $5x^2 - 15x + 30 = 0$ (b) $ax^2 + 2ax - 3 = 0$

(c) $(x - p)(x + p) = 2px$ (d) $ax^2 + bx + c = 0$

A2.6 Kwadratiese formule:

Beskou oef.5 nr.3d: As x opgelos word in $ax^2 + bx + c = 0$ in terme van a, b en c, word die volgende antwoord verkry:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bogenoemde word gesien as die formule wat gebruik word, waarmee enige kwadratiese vergelyking, $ax^2 + bx + c = 0$, opgelos kan word.

Vb.6 Los op vir x: $2(x - 3)(x + 1) = 3$
[Indien nodig, laat die antwoord in eenvoudigste wortelvorm.]

****

$$2(x - 3)(x + 1) = 3$$
$$2(x^2 - 2x - 3) = 3$$
$$2x^2 - 4x - 6 - 3 = 0$$
$$2x^2 - 4x - 9 = 0 \qquad \therefore\ a = 2 \ ; \ b = -4 \ \text{ en } \ c = -9$$
$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-9)}}{2(2)}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 72}}{4}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{88}}{4}$$
$$x = \frac{4}{4} \pm \frac{2\sqrt{22}}{4} \qquad \therefore\ \underline{x = 1 \pm \tfrac{\sqrt{22}}{2}}$$

Oefening 6:

(1) Los op vir x: [Waar nodig, rond die antwoord korrek af tot 2 desimale.]

(a) $3x^2 + 4x - 5 = 0$ (b) $1 + 2x - x^2 = 0$

(c) $(x - 3)(2x + 1) = 2$ (d) $4x + 1 = x^2 - 7$

(e) $2x^2 + 5x - 7 = 0$ (f) $x^2 - 6x = 1$

(g) $(x + 1)^2 - 2(x + 1)(x - 1) = 7$ (h) $px^2 - 3px + 2 = 0$

(2) Los op vir x: [Waar nodig, laat die antwoord in eenvoudigste wortelvorm.]

(a) $\dfrac{2}{x^2 - 1} + \dfrac{x}{x^2 - x} = \dfrac{3}{x}$ (b) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x} = \dfrac{2}{x^2 - 4}$

(3) (a) Los op vir m: $m - \dfrac{8}{m} = 2$

(b) Vervolgens, of andersins, los op vir x: $x^2 + 2x + 1 - \dfrac{8}{x^2 + 2x + 1} = 2$

[Indien nodig, rond af tot 1 desimaal.]

(4) (a) Los op vir p: $\dfrac{6}{p} = p - 1$

(b) Vervolgens, of andersins, los op vir x: $\dfrac{6}{x(x + 2)} = x^2 + 2x - 1$

[Indien nodig, rond af tot die naaste heelgetal.]

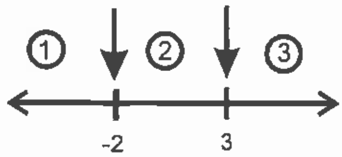
A2.7 **Kwadratiese ongelykhede:**

Metode 1:

Vb.7 Los op vir x: $(x - 3)(x + 2) \leq 0$

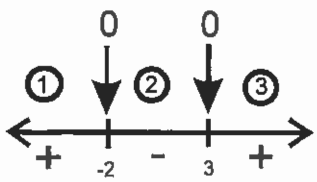
****

Stel $y = (x - 3)(x + 2)$
Ondersoek die moontlike uitkomste in die verskillende gebiede deur telkens 'n moontlike waarde te kies vir x en dan te bepaal wat die uitkoms sal wees:



Kies enige waarde vir x in gebied 1: $y = (-4 - 3)(-4 + 2) = (-7)(-2) = +14$
Kies $x = -2$: $y = (-2 - 3)(-2 + 2) = (-5)(0) = 0$
Kies enige waarde vir x in gebied 2: $y = (0 - 3)(0 + 2) = (-3)(2) = -6$
Kies $x = 3$: $y = (3 - 3)(3 + 2) = (0)(5) = 0$
Kies enige waarde vir x in gebied 3: $y = (7 - 3)(7 + 2) = (4)(9) = +36$

$\therefore$ *As* $(x - 3)(x + 2) \leq 0$*, dan lees ons die oplossing af by die negatiewe gebied, maar ook waar die oplossing gelyk is aan 0:*



$\therefore$ $\underline{-2 \leq x \leq 3}$

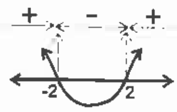
Metode 2:

Vb.8 Los op vir x: $x^2 > 4$
****

$x^2 - 4 > 0$ *[Kry eers 0 aan die een kant.]*
$(x - 2)(x + 2) > 0$ *[Faktoriseer.]*

Nou maak ons gebruik van die kwadratiese funksie (parabool) soos reeds in graad 10 geskets!
Onthou:
As $a > 0$:  *en as* $a < 0$: 

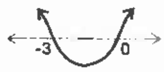
$\therefore$ *Maak 'n rowwe skets van* $y = x^2 - 4$.
Dui die vorm en x-afsnitte aan.



$\therefore$ *Oplossing:* $\boldsymbol{x < -2}$ ***of*** $\boldsymbol{x > 2}$

Vb.9 Los op vir x: $-x^2 - 3x \leq 0$
****

Deel deurgaans met -1: $x^2 + 3x \geq 0$
Faktoriseer: $x(x + 3) \geq 0$
Interpreteer oplossing grafies:



Oplossing: $\boldsymbol{x \leq -3}$ ***of*** $\boldsymbol{x \geq 0}$

Vb.10 Los op vir m: $2m^2 + 2 > -4m$
****

$\therefore \quad 2m^2 + 4m + 2 > 0$ *[Kry alle terme aan die een kant]*
$\therefore \quad m^2 + 2m + 1 > 0$ *[Deel deurgaans met 2]*
$\therefore \quad (m + 1)(m + 1) > 0$ *[Faktoriseer]*
$\therefore \quad (m + 1)^2 > 0$
maar enige volkome vierkant, $(\ )^2$*, is altyd positief!*
$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{m \in R, \text{ maar } m \neq -1}}$ *[*$(m + 1)^2 \neq 0$*, want daar is net >]*

Oefening 7:

(1) Los die volgende ongelykhede op:

(a) $x^2 - 7x + 12 > 0$
(b) $p^2 \geq 25$
(c) $3n^2 - 4n > 0$
(d) $4 - 3x < x^2$
(e) $m^2 \leq -2m + 8$
(f) $(x - 1)(x + 1) > 3$
(g) $25 - 10x + x^2 \geq 0$
(h) $(m + 3)(m - 1) < 0$
(i) $x^2 - 7x \leq 3x - 16$
(j) $2p(p + 3) > 20$
(k) $(x - 1)(x + 2)(x + 5) \leq 0$
(l) $7x + 3 \leq 6x^2$
(m) $2x^2 - 3x + 4 < 3(1 - x)$
(n) $(p + 1)^3 - 4(p + 1) > 0$
(o) $2(x + 1)^2 - 11 < (x - 2)(x + 2)$
(p) $x^3 + 2x^2 + x > 0$

(2) Beskou: $$y = \frac{-2}{x + 2} - \sqrt{x^2 - 9}$$

(a) Vir watter waardes van x is y ongedefinieerd?

(b) Vir watter waardes van x is y nie-reëel?

(3) Beskou: $y = x^2 + 4x + 5$

(a) Los op vir x as $y = 0$

(b) Skryf $y = x^2 + 4x + 5$ in die vorm $y = (x + p)^2 + q$ d.m.v vierkantsvoltooiing.

(c) Los vervolgens, of andersins op vir x: $x^2 + 4x + 5 > 0$

(4) (a) Los op vir x: $(x + 1)^2 - 3(2x + 2) + 1 = 0$
[Indien nodig, laat die antwoord in eenvoudigste wortelvorm.]

(b) Los vervolgens op vir x: $(x + 1)^2 < 3(2x + 2) - 1$

A2.8 Gelyktydige vergelykings:

Vb.11 Los op vir x en y: $2x - y = 1$ *en* $2x^2 = 3 - y^2$
****

Uit: $2x - y = 1$

$2x - 1 = y$ → *vervang in* $2x^2 = 3 - y^2$

$2x^2 = 3 - (2x - 1)^2$

$2x^2 = 3 - (4x^2 - 4x + 1)$

$2x^2 = 3 - 4x^2 + 4x - 1$

$6x^2 - 4x - 2 = 0$

$3x^2 - 2x - 1 = 0$

$(3x + 1)(x - 1) = 0$

$3x + 1 = 0$ *of* $x - 1 = 0$

$\therefore \underline{x = \frac{-1}{3}}$ $\qquad \underline{x = 1}$

$2(\frac{-1}{3}) - 1 = y$

$\frac{-2}{3} - 1 = y$

$\therefore \underline{y = -1\frac{1}{3}}$

$2(1) - 1 = y$

$\therefore \underline{y = 1}$

Oefening 8:

(1) Los die volgende vergelykings gelyktydig op:

(a)	$y - x = 1$	en	$2xy - x^2 + 1 = 3y$
(b)	$m + n - 3 = 0$	en	$m^2 - 2m + 3n^2 = 2$
(c)	$2a - b = -1$	en	$3a^2 - 2b - b^2 = 4$
(d)	$p - 4 = 2q$	en	$p^2 - 3pq + 2q^2 - 4 = 0$

(e)	$y + 2x = 3$	en	$y^2 - 2xy - y = 0$
(f)	$2a = 3b$	en	$2a^2 - 4a + b^2 = 10$
(g)	$xy = -4$	en	$x(x + 1) + y - 3x - x^2 = -3(x + 1)$
(h)	$\frac{x-1}{2} = y$	en	$x^2 = 2xy - y^2 + 1$
(i)	$2m - n = 3$	en	$m^2 + n^2 = 5$
(j)	$2x - 3y = 4$	en	$(2x - 3y)(x - 2y) = 12$

(2) (a) Los op vir p en q: $p + q = 3$ en $p^2 - pq + q^2 = 3$

(b) Vervolgens of andersins los op vir x en y: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$ en $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 3$

A2.9 Eksponensiaal vergelykings:

Vb.12 Los op vir x: *(a)*

$$27^x = \frac{1}{9}$$
$$(3^3)^x = \frac{1}{3^2}$$
$$3^{3x} = 3^{-2}$$
$$GG \Leftrightarrow GE$$
$$3x = -2$$
$$\underline{x = \tfrac{-2}{3}}$$

(b)

$$2x^{\frac{1}{3}} = 6$$
$$x^{\frac{1}{3}} = 3$$
$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{1}} = (3)^3$$
$$\underline{x = 27}$$

Vb.13 Los op vir x:

$$2^x = 2^{x+2} - 12$$
$$2^x - 2^{x+2} = -12$$
$$2^x - 2^x.2^2 = -12$$
$$2^x(1 - 4) = -12$$
$$2^x(-3) = -12$$
$$2^x = \tfrac{-12}{-3}$$
$$2^x = 4$$
$$2^x = 2^2$$
$$\therefore \quad \underline{x = 2}$$

<u>Oefening 9</u>:

Los op vir x:

(1) $2^x = 64$	(2) $3^{1-x} - 27 = 0$	(3) $4^x = 0{,}5$
(4) $2 \times 3^{x+3} = 18$	(5) $\frac{1}{8} = 4^{2x}$	(6) $25^{2x+1} - 1 = 0$
(7) $3^{3x} \cdot 3^{1-x} = 27$	(8) $\sqrt{2} \cdot 2^{2-x} = 2$	(9) $2x^{\frac{1}{2}} = 16$
(10) $3^{\frac{2}{x}} = 27$	(11) $4^{1-x} \times 8^x = 1$	(12) $125^x = 0{,}04$

(13) $5^{x-1} + 5^x = 30$ (14) $2^{2x+1} - 4^{x-1} - 14 = 0$

(15) $3^{x+2} - 2^3 = 3^{x+1} + 10$ (16) $(3 \times 2^{x+1})^2 = 9 \times 4^{1-x}$

(17) $2^{x-2} = 5 - 2^x$ (18) $(9^{x+1} - 27)(9^x + 3^{2x+1} - 12) = 0$

A2.10 HERSIENINGSOEFENING:

(1) Beskou: $A = \dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{2-8x}{4x^2-1}$

(a) Vereenvoudig A.
(b) Vir watter waarde(s) van x is A ongedefinieerd.
(c) Los op vir x as $A = 2$.

(2) (a) Los op vir p: $p + \frac{12}{p} = -7$

(b) Vervolgens of andersins, los op vir x: $2x^2 - 3x - 3 + \dfrac{12}{2x^2 - 3x - 3} = -7$

(3) Beskou: $B = \sqrt{2x^2 + x - 3} + x$
(a) Vir watter waardes van x is B nie-reëel?
(b) Bereken x indien $B = 1$.

(4) Los op vir x deur van **twee** verskillende metodes gebruik te maak: $2x^2 - 8x + 4 = 0$
Waar nodig, laat jou antwoord in eenvoudigste wortelvorm.

(5) Bepaal twee waardes van m waarvoor die volgende uitdrukkings volkome vierkante sal wees:
(a) $x^2 - mx + 10$ (b) $y^2 + m(2y - 3) + 4$

(6) Bepaal x in terme van m en n deur gebruik te maak van vierkantsvoltooiing:

$$2mx^2 - 4mx + 6n = 0$$

(7) Beskou: $(2x - 1)(y + 4) = 0$. Vir watter waardes van y sal:
(a) $x = -1$ (b) $x = \frac{1}{2}$

(8) Los op vir x. Waar nodig, rond af tot drie desimale:

(a) $x(x - 3) + 4 = 0$ (b) $x - 3x^2 = -4$

(c) $\dfrac{x + 2}{x + 3} = \dfrac{x}{x + 1}$ (d) $3^x + 3^{x+2} = 10$

(e) $\dfrac{3}{x^2 - x} - \dfrac{1}{x^2 - 1} + \dfrac{3}{x} = 0$ (f) $27x^{\frac{3}{2}} = 64x^{\frac{-3}{2}}$

(9) Los die volgende vergelykings gelyktydig op:

(a) $x - y = 5$ en $x^2 + 2y^2 = 57$

(b) $2x - y = 3$ en $x^2 + xy - y^2 = -19$

(10) (a) Los op vir x, korrek tot een desimaal: $x(x - 3) - 3(x + 1) = 1$

(b) Vervolgens of andersins, los op vir x: $x^2 - 6x - 4 > 0$

(11) As $f(x) = x^2 + 6x$ en $g(x) = 8 - x^2$, bereken:
[Waar nodig, laat jou antwoord in eenvoudigste wortelvorm.]

(a) x as $g(x) = 0$ (b) $f(-6)$

(c) x as $f(x) = g(x)$:

(12) Beskou: $P = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2 + x}$. Vir watter waarde(s) van x is:

(a) P nie-reëel (b) P ongedefinieerd

(13) Beskou: $h(x) = x(2x + 1)(x^2 + 3)(x - 6)$. Los op vir x indien $h(x) = 0$, waar x:

(a) 'n telgetal is. (b) 'n irrasionale getal is.
(c) nie- reëel is. (d) 'n heelgetal is.

(14) Bepaal $\frac{y}{x}$ as $4x^2 - 4xy - 3y^2 = 0$

(15) (a) Toon aan dat $3(x + 1)^2 + 4 > 0$ vir alle reële waardes van x.

(b) Vervolgens of andersins, los op vir x: $\dfrac{x^2 - 4}{3(x + 1)^2 + 4} \leq 0$

(16) Indien een van die wortels van $mx^2 - 4x + 1 = 0$, gelyk is aan 1, bereken die waarde van m, asook die ander wortel.

(17) $p(x) = x^2 + 4x$ en $q(x) = p(x) + 5$

(a) Bewys deur middel van vierkantsvoltooiing dat $q(x) = (x + 2)^2 + 1$

(b) Los vervolgens, of andersins, vir x op indien $q(x) \geq 0$

****