Graad 11 – Boek C

(CAPS Uitgawe)

INHOUD:

Hierdie boek is opgestel en verwerk deur E.J. Du Toit in 2008.
Hersiene CAPS uitgawe 2012.

Kontak nommer: 086 618 3709 (Faks!)

ISBN 978-1-919957-66-1

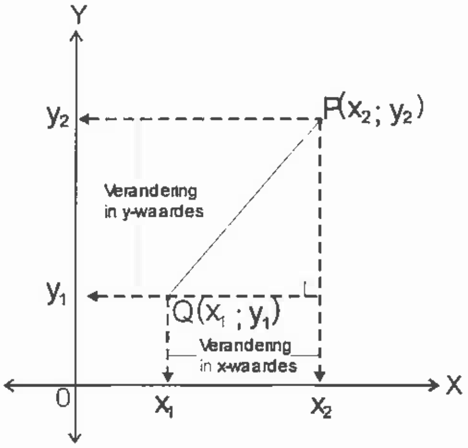
Hoofstuk C1

Analitiese meetkunde

C1.1 Gradiënt:
C1.1.1 Berekening van gradiënt:

In graad 10 het ons reeds die formule afgelei vir die gradiënt van 'n reguitlyn.

Afleiding van 'n formule vir die gradiënt van 'n reguitlyn:

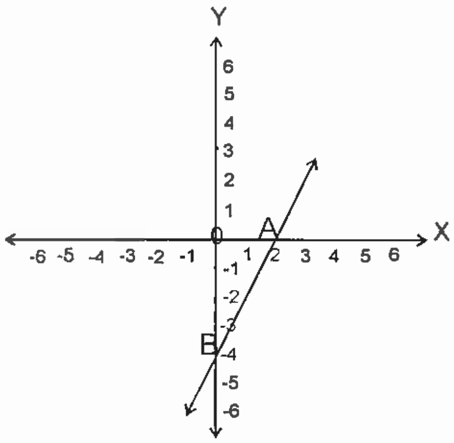


$$\text{Gradiënt/Helling} = \frac{\text{Verandering in } y-\text{waardes}}{\text{Verandering in } x-\text{waardes}}$$

$$m_{PQ} = \frac{\text{Verskil in } y-\text{waardes}}{\text{Verskil in } x-\text{waardes}}$$

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Vb.1



In die skets langsaan is 'n reguitlyn deur die punte A(2 ; 0) en B(0 ; -4).
Die verskil tussen die y-waardes is dus:
$-4 - 0 = -4$ *en*
die verskil tussen die x-waardes is dus:
$0 - 2 = -2$

$$\therefore \text{ helling} = \frac{\text{verskil tussen } y-\text{waardes}}{\text{verskil tussen } x-\text{waardes}}$$

$$= \frac{-4}{-2}$$

$$m_{AB} = \underline{2}$$

Vb.2 Bereken die gradiënt van die lyn deur die volgende punte: M(2 ; -1) en N(-2 ; 3)

****

$x_1 \; y_1 \qquad x_2 \; y_2$

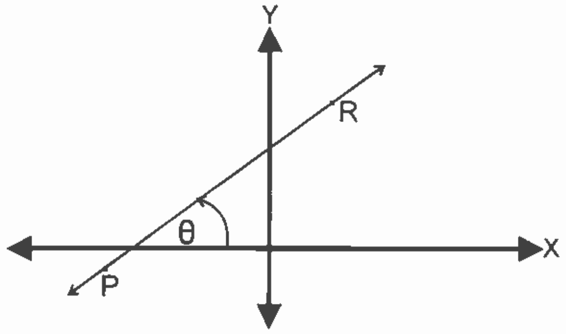
M(2 ; -1) en N(-2 ; 3)

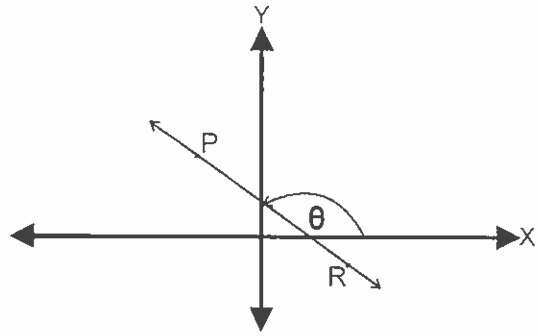
$$m_{MN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-1)}{-2-(2)} = \frac{3+1}{-2-2} = \frac{4}{-4}$$

$$\therefore m_{MN} = \underline{-1}$$

C1.1.2 Toepassings van gradiënt:

* Ewewydige lyne se gradiënte is dieselfde: As $m_1 = m_2 \Leftrightarrow$ die lyne is ewewydig.
* Die produk van loodregte lyne se gradiënte is gelyk aan -1 :
  As $m_1 \times m_2 = -1 \Leftrightarrow$ die lyne is loodreg op mekaar.
* Drie of meer punte is kollineêr of saamlynig indien die punte op dieselfde reguitlyn lê.
  $\therefore\ m_{AB} = m_{BC} \Leftrightarrow$ punte A, B en C lê op dieselfde reguitlyn.
* Die inklinasiehoek van 'n lyn is die hoek tussen die reguitlyn en die positiewe x-as:





Soos hierbo sal die inklinasiehoek, θ 'n skerphoek ($0° < \theta < 90°$) wees, indien die lyn se gradiënt positief is.

Soos hierbo sal die inklinasiehoek, θ 'n stomphoek ($90° < \theta < 180°$) wees, indien die lyn se gradiënt negatief is.

Om die inklinasiehoek te bepaal: $\tan\theta = m_{PR}$

Vb.3 Beskou: P(-3 ; - 2) , Q(5 ; 4) en R(1 ; -4)
(a) Bepaal of die drie punte saamlynig is.
(b) Bewys dat $QR \perp PR$.
(c) Bereken die inklinasiehoek (afgerond tot 2 desimale) van lyn PQ.

****

(a) $m_{PQ} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{4-(-2)}{5-(-3)} = \dfrac{4+2}{5+3} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$m_{QR} = \dfrac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q} = \dfrac{-4-4}{1-5} = \dfrac{-8}{-4} = 2$

$\therefore$ *P, Q en R is nie saamlynig nie, want* $m_{PQ} \neq m_{QR}$

(b) *In (a) het ons reeds bereken dat* $m_{QR} = 2$

$m_{PR} = \dfrac{y_R - y_P}{x_R - x_P} = \dfrac{-4-(-2)}{1-(-3)} = \dfrac{-4+2}{1+3} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

$\therefore\ m_{QR} \times m_{PR} = \dfrac{2}{1} \times \dfrac{-1}{2} = -1$

$\therefore\ QR \perp PR$

(c) *Soos reeds in (a) bereken is* $m_{PQ} = \dfrac{3}{4}$

$\therefore\ \tan\theta = \dfrac{3}{4}$

$\therefore\ \underline{\theta = 36{,}87°}$

Oefening 1: Datum:______________

(1) Bepaal of die punte A, B en C kollineêr is of nie:

(a) A(1 : 2) , B(3 : 5) en C(5 : 7)

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$

$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{7-5}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$

∴ A, B en C is nie kollineêr!

(b) A(-1 : 3) , B(4 : 0) en C(14 : 6)

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-3}{4-(-1)} = \frac{-3}{5}$

$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{6-0}{14-4} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

∴ A, B en C is nie kollineêr!

(2) M(-2 ; -4) , N(1 : -3) , R(2 ; -1) , T(-3 ; -1) en K(3 ; -4)

(a) Bepaal watter van die volgende lyne is ewewydig en watter lyne is loodreg op mekaar: MN , TK , RK , NR en TM

(b) Sonder om die inklinasiehoek te bereken, bepaal watter van die lyne in (a) sal 'n inklinasiehoek hê wat 'n skerphoek is.

(c) Bereken die inklinasiehoek van lyn TN.

(a) $m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{-3-(-4)}{1-(-2)} = \frac{-3+4}{1+2} = \frac{1}{3}$

$m_{TK} = \frac{y_K - y_T}{x_K - x_T} = \frac{-4-(-1)}{3-(-3)} = \frac{-4+1}{3+3} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

$m_{RK} = \frac{y_K - y_R}{x_K - x_R} = \frac{-4-(-1)}{3-(2)} = \frac{-4+1}{3-2} = \frac{-3}{1} = -3$

$m_{NR} = \frac{y_R - y_N}{x_R - x_N} = \frac{-1-(-3)}{2-(1)} = \frac{-1+3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$

$m_{TM} = \frac{y_M - y_T}{x_M - x_T} = \frac{-4-(-1)}{-2-(-3)} = \frac{-4+1}{-2+3} = \frac{-3}{1} = -3$

∴ Ewewydige lyne: RK ∥ TM en loodregte lyne: MN ⊥ RK ; MN ⊥ TM ; TK ⊥ NR

(b) Lyne MN en NR (Positiewe gradiënte!)

(c) $m_{TN} = \frac{y_N - y_T}{x_N - x_T} = \frac{-3-(-1)}{1-(-3)} = \frac{-3+1}{1+3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \tan\theta = m = -\frac{1}{2}$

$\theta = 180^\circ - 26{,}6^\circ$

$\theta = 153{,}4^\circ$

(3) D(-3 ; -1) , E(0 : -4) , F(-1 ; y) , G(x ; 3) en H(2 ; 2). Bereken die waarde van:

(a) x, as EG // DH

$m_{EG} = \frac{y_G - y_E}{x_G - x_E} = \frac{3-(-4)}{x-0}$

$m_{DH} = \frac{y_H - y_D}{x_H - x_D} = \frac{2-(-1)}{2-(-3)} = \frac{3}{5}$

$\therefore \frac{3+4}{x-0} = \frac{3}{5}$ (EG ∥ DH)

$\frac{7}{x} = \frac{3}{5}$

$35 = 3x$

$x = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$

(b) y, as FH ⊥ DE

$m_{FH} = \frac{y_H - y_F}{x_H - x_F} = \frac{2-(y)}{2-(-1)} = \frac{2-y}{2+1}$

$m_{DE} = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{-4-(-1)}{0-(-3)} = \frac{-4+1}{0+3} = \frac{-3}{3}$

$\therefore \frac{2-y}{3} \times \frac{-3}{3} = -1$ (FH ⊥ DE)

$(2-y)(-1) = (-1)(3)$

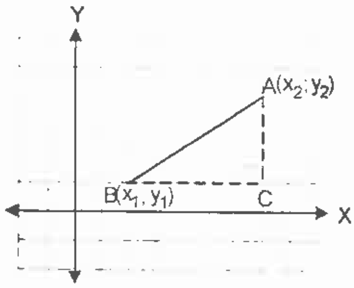
$-2 + y = -3$

$y = -1$

C1.2 Afstand tussen twee punte:

Afleiding van 'n formule vir die afstand tussen enige twee punte:

Die koördinate van C sal $(x_2 ; y_1)$ wees, want A en C het dieselfde x-koördinate en B en C dieselfde y-koördinate.
Die lengte van BC is die verskil tussen die twee x-koördinate van B en C en die lengte van AC is die verskil tussen die y-koördinate van A en C.



$\therefore$ BC $= x_2 - x_1$ en AC $= y_2 - y_1$ [Onthou: BC = CB!]

$\therefore$ AB² = BC² + AC² [Pythagoras]

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\sqrt{AB^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Vb.4 Bereken die afstand tussen S(7 ; -5) en T(4 ; -2). Indien nodig laat jou antwoord in eenvoudigste wortelvorm.

****

$x_1 \; y_1 \qquad x_2 \; y_2$

S(7 ; -5) en T(4 ; -2)

$\therefore d(ST) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d(ST) = \sqrt{[(4)-(7)]^2 + [(-2) - (-5)]^2}$

$d(ST) = \sqrt{(4 - 7)^2 + (-2 + 5)^2}$

$d(ST) = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2}$

$d(ST) = \sqrt{9 + 9}$

$d(ST) = \sqrt{18}$

$d(ST) = \sqrt{9 \times 2}$

$\mathbf{d(ST)} = 3\sqrt{2}$

Oefening 2: Datum:______________

(1) Bereken die afstand tussen P en Q in elk van die volgende gevalle. Waar nodig, rond af, korrek tot twee desimale:

(a) P(2 ; 5) en Q(7 ; 4)

$d(PQ) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

$= \sqrt{(2-7)^2 + (5-4)^2}$

$= \sqrt{(-5)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{25+1}$

$= \sqrt{26}$

$d(PQ) \approx 5,10$

(b) P(-2 ; -1) en Q(0 ; 5)

$d(PQ) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

$= \sqrt{(-2-0)^2 + (-1-5)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{4 + 36}$

$= \sqrt{40}$

$d(PQ) \approx 6,32$

(c) P(-3 ; 1) en Q(-3 ; 13)

$d(PQ) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

$= \sqrt{(-3-(-3))^2 + (1-13)^2}$

$= \sqrt{(-3+3)^2 + (-12)^2}$

$= \sqrt{0^2 + 144}$

$= \sqrt{144}$

$d(PQ) = 12$

(d) P(2,3 ; 3,1) en Q(5,3 ; 1,1)

$d(PQ) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

$= \sqrt{(2,3 - 5,3)^2 + (3,1 - 1,1)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{9 + 4}$

$= \sqrt{13}$

$d(PQ) \approx 3,61$

(e) P(2m ; m) en Q(7m ; - 4m)

$d(PQ) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

$= \sqrt{(2m - 7m)^2 + (m - (-4m))^2}$

$= \sqrt{(-5m)^2 + (m + 4m)^2}$

$= \sqrt{25m^2 + (5m)^2}$

$= \sqrt{25m^2 + 25m^2}$

$= \sqrt{50m^2}$

$d(PQ) \approx 7,07\ m$

(2) Bereken d(AB) in elk van die volgende. Waar nodig, laat die antwoord in eenvoudigste wortelvorm:

(a) A(1 ; $\sqrt{8}$) en B(-7 ; 0)

$d(AB) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

$= \sqrt{(1 - (-7))^2 + (\sqrt{8} - 0)^2}$

$= \sqrt{(1 + 7)^2 + (\sqrt{8})^2}$

$= \sqrt{(8)^2 + (\sqrt{8})^2}$

$= \sqrt{64 + 8}$

$= \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$

$d(AB) = 6\sqrt{2}$

(b) A(-10 ; 9) en B(-2 ; 15)

$d(AB) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

$= \sqrt{(-10 - (-2))^2 + (9 - 15)^2}$

$= \sqrt{(-10 + 2)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{64 + 36}$

$= \sqrt{100}$

$d(AB) = 10$

(c) A(4 ; 1) en B(-4 ; 9)

$d(AB) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

$= \sqrt{(4 - (-4))^2 + (1 - 9)^2}$

$= \sqrt{(4 + 4)^2 + (1 - 9)^2}$

$= \sqrt{(8)^2 + (-8)^2}$

$= \sqrt{64 + 64}$

$= \sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2}$

$d(AB) = 8\sqrt{2}$

(3) Bereken die waarde(s) van p indien d(LM) = 5 met L(-2 ; p) en M(-5 ; 3).

$d(LM) = \sqrt{(x_L - x_M)^2 + (y_L - y_M)^2}$

$5 = \sqrt{(-2 - (-5))^2 + (p - 3)^2}$

$(5)^2 = \left(\sqrt{(-2 + 5)^2 + (p - 3)^2}\right)^2$

$25 = (3)^2 + (p - 3)^2$

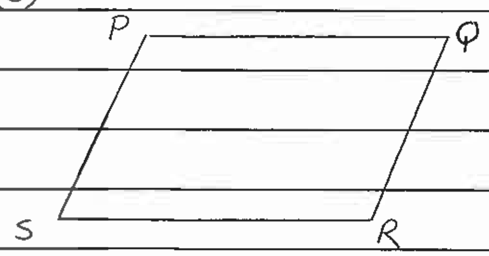
$25 = 9 + p^2 - 6p + 9$

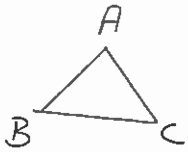
$0 = p^2 - 6p - 7$

$0 = (p - 7)(p + 1)$

$p = 7$ of $p = -1$

(5)





(4) A(2 ; -2) , B(3 ; 4) en C(-3 ; 5) is die hoekpunte van driehoek ABC.

(a) Bereken die omtrek van driehoek ABC. Rond die antwoord af tot 1 desimaal.

$* \ d(AB) = \sqrt{(3-2)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{(1)^2 + (6)^2} = \sqrt{1+36}$

$= \sqrt{37} \approx 6{,}08\ldots$

$* \ d(BC) = \sqrt{(-3-3)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (1)^2} = \sqrt{36+1}$

$= \sqrt{37} \approx 6{,}08\ldots$

$* \ d(AC) = \sqrt{(2-(-3))^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{(5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{25+49}$

$= \sqrt{74} \approx 8{,}60\ldots$

$\therefore$ Omtrek $= \sqrt{37} + \sqrt{37} + \sqrt{74} = 20{,}8$

(b) Toon aan dat $\hat{B} = 90°$.

$AB^2 + BC^2$

$= (\sqrt{37})^2 + (\sqrt{37})^2$

$= 37 + 37$

$= 74$

$AC^2 = (\sqrt{74})^2 = 74$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore$ Pythagoras geld

$\therefore \hat{B} = 90°$

(5) P(-2 ; 0) , Q(-1 ; -3) , R(2 ; 0) en S(1 ; 3) is die hoekpunte van 'n parallelogram. Teken 'n diagram!

(a) Bereken of PQRS 'n ruit is of nie.

$d(PQ)$

$= \sqrt{(-2-(-1))^2 + (0-(-3))^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{1+9}$

$= \sqrt{10}$

$d(QR)$

$= \sqrt{(-1-2)^2 + (-3-0)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{9+9}$

$= \sqrt{18}$

PQRS is nie 'n ruit nie, want aangrensende sye ≠ !

(b) Bereken die gradiënt van PS:

$m_{PS} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\qquad P(\overset{x_1}{-2} ; \overset{y_1}{0}) \qquad S(\overset{x_2}{1} ; \overset{y_2}{3})$

$= \dfrac{3 - 0}{1 - (-2)}$

$m_{PS} = \dfrac{3}{1+2} = \dfrac{3}{3} = 1$

(c) Sonder om enige berekeninge te doen, bepaal die gradiënt van QR. Motiveer jou antwoord.

$m_{QR} = 1$, teenoorst. sye van parm //, d.w.s. gradiënte is dieselfde!

(6) Bepaal of Δ VWX gelykbenig of gelyksydig is met V(2 ; 6) , W(3 ; -1) en X(-3 ; 1). Toon alle berekeninge:

$d(VW) = \sqrt{(2-3)^2 + (6-(-1))^2}$
$= \sqrt{(-1)^2 + (7)^2}$
$= \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

$d(WX) = \sqrt{(3-(-3))^2 + (-1-1)^2}$
$= \sqrt{(6)^2 + (-2)^2}$
$= \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

$d(VX) = \sqrt{(2-(-3))^2 + (6-1)^2}$
$= \sqrt{(5)^2 + (5)^2}$
$= \sqrt{25+25}$
$= \sqrt{50}$

$\therefore VW = VX \neq WX$
$\therefore \Delta VWX$ is gelykbenig!

(7) S(-2 ; 3) , T(1 ; 2) en R(-3 ; 0) is drie punte wat rondom die punt A(-1 ; 1) lê. Toon aan dat S, T en R op die omtrek van die sirkel met middelpunt A lê.

$d(AS) = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (3-1)^2}$
$= \sqrt{(-1)^2 + (2)^2}$
$= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$d(AT) = \sqrt{(1-(-1))^2 + (2-1)^2}$
$= \sqrt{(2)^2 + (1)^2}$
$= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$d(AR) = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (0-1)^2}$
$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$
$= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$\therefore AS = AT = AR$
$\therefore$ almal is radii
$\therefore$ S, T en R lê op omtrek!

(8) Bereken die waarde(s) van y waarvoor PQ = QR indien P(-2 ; 5) , Q(1 ; 6) en R(0 ; y).

$PQ^2 = QR^2$ as $PQ = QR$

$\therefore \left(\sqrt{(-2-1)^2 + (5-6)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(1-0)^2 + (6-y)^2}\right)^2$

$(-3)^2 + (-1)^2 = (1)^2 + (6-y)^2$

$9 + 1 = 1 + (6-y)^2$

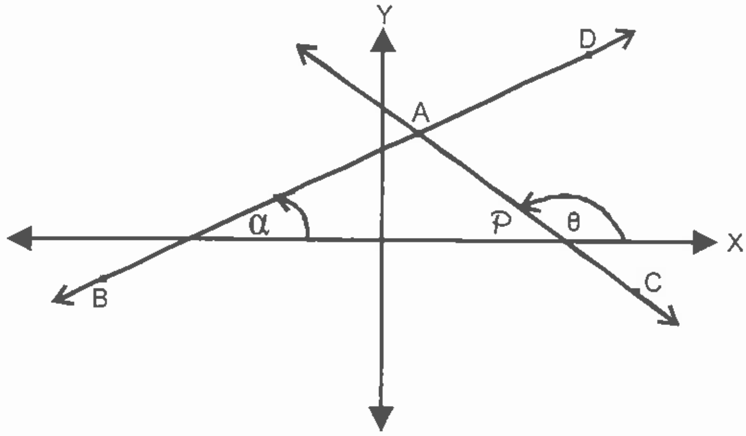
$9 = (6-y)^2$

$\pm 3 = 6 - y$

$3 = 6 - y$ óf $-3 = 6 - y$

$y = 3$ $\qquad$ $y = 9$

☺ **Bereken die grootte van $D\hat{A}C$, afgerond tot een desimaal, waar A(2 ; 5), B(-6 ; -1) en C(7 ; -2):**



$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$

$= \frac{-2-5}{7-2}$

$= -\frac{7}{5}$

$\therefore \tan\theta = -\frac{7}{5}$

$\therefore \theta = 180° - 54{,}5°$

$\theta = 125{,}5°$

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$= \frac{-1-5}{-6-2}$

$= \frac{-6}{-8} = \frac{6}{8}$

$\therefore \tan\alpha = \frac{6}{8}$

$\therefore \alpha = 36{,}9°$

$\therefore P = 54{,}5°$ [∠e op reguitlyn]

$\therefore D\hat{A}C = \alpha + P$ [buite ∠ van Δ]

$= 36{,}9° + 54{,}5°$

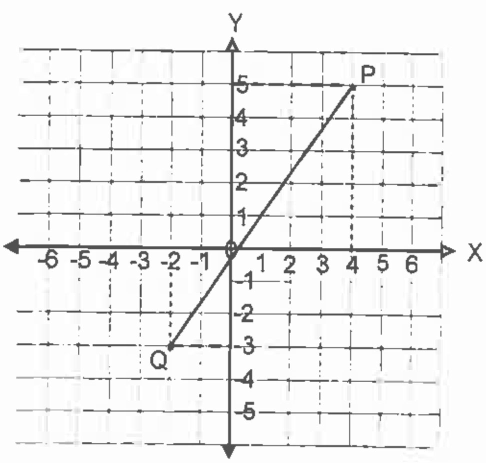
$D\hat{A}C = 91{,}4°$

C1.3 Middelpunt van 'n lynstuk:

Vb.5 Bereken die middelpunt van die lynstuk PQ met P(-4 ; 5) en Q(2 ; -1).

****

PQ se middelpunt, M, sal presies halfpad tussen P en Q lê. M se x-koördinaat sal presies in die middel van P en Q se x-koördinate lê en M se y- koördinaat presies in die middel van P en Q se y- koördinate.



$\therefore M_x = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = \underline{1}$

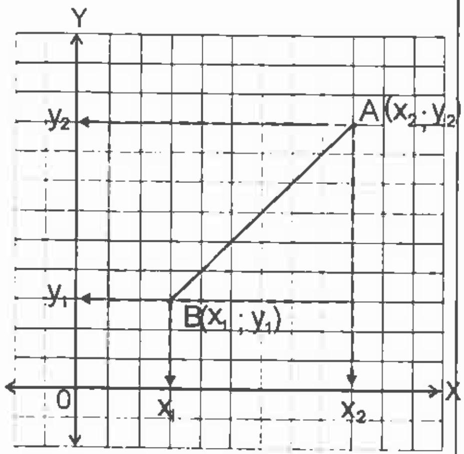
en $M_y = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = \underline{1}$

Afleiding van 'n formule vir die middelpunt van enige lynstuk tussen twee punte:

Die middelpunt M van lynstuk AB lê presies halfpad tussen A en B. $\therefore$ M se x-koördinaat lê presies halfpad tussen die x-koördinate van A en B en M se y-koördinaat lê presies halfpad tussen A en B se y-koördinate.

$$\therefore\ x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{en} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\therefore\ M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\ ;\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Vb.6 Bepaal die koördinate van die middelpunt van R(-3 ; 2) en T(-4 ; 8).

****

x_1 y_1 x_2 y_2

R(-3 ; 2) en T(-4 ; 8).

$$\therefore\ M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\ ;\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-3 + (-4)}{2}\ ;\ \frac{2 + 8}{2}\right) = \left(\frac{-3 - 4}{2}\ ;\ \frac{10}{2}\right)$$

$$\therefore\ M = \left(\frac{-7}{2}\ ;\ 5\right) \quad \text{óf} \quad \left(-3\tfrac{1}{2}\ ;\ 5\right)$$

Oefening 3: Datum:______________

(1) Bereken die middelpunt van elk van die volgende lynstukke:

(a) A(-2 ; 4) en B(-6 ; 4)

$$m = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2-6}{2}\ ;\ \frac{4+4}{2}\right) = \left(-\frac{8}{2}\ ;\ \frac{8}{2}\right) = (-4\ ;\ 4)$$

(b) C(-2 ; 0) en D(0 ; 2)

$$m = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2+0}{2}\ ;\ \frac{0+2}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}\ ;\ \frac{2}{2}\right) = (-1\ ;\ 1)$$

(c) I(-2 ; -7) en J(2 ; 1)

$$m = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2+2}{2}\ ;\ \frac{-7+1}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}\ ;\ -\frac{6}{2}\right) = (0\ ;\ -3)$$

(d) K(5 ; 1) en L(11 ; 1)

$$m = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{5+11}{2}\ ;\ \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{16}{2}\ ;\ \frac{2}{2}\right) = (8\ ;\ 1)$$