<u>Graad 12 – Handboek Antwoorde</u>

(Eerste KABV uitgawe)

<u>INHOUD</u>:

Hierdie boek is opgestel en verwerk deur E.J. Du Toit in 2023.

Webtuiste: www.abcbooks.co.za

MET SPESIALE DANK EN ERKENNING AAN DIE DEPARTEMENT VAN ONDERWYS VIR DIE GEBRUIK VAN UITTREKSELS UIT OU VRAESTELLE.

ISBN 978-1-928336-62-4

Besoek ook www.abcmathsandscience.co.za vir ekstra oefeninge, toetse en vraestelle.

Hoofstuk A2
Logaritmes en funksie inverses

Sien graad 11 Funksies en eksponente vir hersiening en agtergrond!

A2.1 Logaritmes:
A2.1.1 Definisie van 'n logaritme:

Logaritmes is die omgekeerde bewerking van eksponente.

Bv. As $2^5 = 32$ dan is $\log_2 32 = 5$

$\therefore$ Per definisie as $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ met $a > 0$; $a \neq 1$ en $x > 0$

Onthou: * $\log_a 1 = 0$ want $a^0 = 1$

* Die natuurlik logaritme is $\log x \Leftrightarrow \log_{10} x$

* $\log_a a = 1$ want $a^1 = a$

A2.1.2 Wette van logaritmes:

Vir $a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$; $b \neq 1$; $x > 0$ en $y > 0$

- $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
- $n \log_a x = \log_a x^n$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Vb. 1 Vereenvoudig: (Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.)

(a)
$$\begin{aligned} & \log_4 2 + \log_4 32 \\ &= \log_4(2 \times 32) \\ &= \log_4(64) \\ &= \log_4(4^3) \\ &= 3\log_4(4) \\ &= 3(1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} & \log 200 - \log 2 \\ &= \log(200 \div 2) \\ &= \log 100 \\ &= \log_{10} 10^2 \\ &= 2\log_{10} 10 \\ &= 2(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

(c) $\log_3 36 \times \log_6 9$

$= \frac{\log 36}{\log 3} \times \frac{\log 9}{\log 6}$

$= \frac{\log 6^2}{\log 3} \times \frac{\log 3^2}{\log 6}$

$= \frac{2\log 6}{\log 3} \times \frac{2\ \log 3}{\log 6}$

$= \frac{2\cancel{\log 6}}{\cancel{\log 3}} \times \frac{2\ \cancel{\log 3}}{\cancel{\log 6}}$

$= 2 \times 2$

$= 4$

(d) $\log_4 16 + \log_3 \frac{1}{3} - \log_7 1$

$= \log_4 4^2 + \log_3 3^{-1} - 0$

$= 2\log_4 4 + (-1)\log_3 3$

$= 2(1) - 1(1)$

$= 2 - 1$

$= 1$

Vb. 2 As $\log 3 = 0,477$ en $\log 5 = 0,699$, bereken:
(Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.)

(a) $\log 45$

$= \log(9 \times 5)$

$= \log(3^2 \times 5)$

$= \log 3^2 + \log 5$

$= 2\ \log 3 + \log 5$

$= 2 \times 0,477 + 0,699$

$= 0,954 + 0,699$

$= 1,653$

(b) $\log 30$

$= \log(3 \times 10)$

$= \log 3 + \log 10$

$= \log 3 + \log 10$

$= 0,477 + 1$

$= 1,477$

Vb. 3 Los op vir x: (Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.)

(a) $\log x + \log(x + 3) = 1$

$\therefore \log_{10} x(x+3) = 1$

$\therefore 10^1 = x^2 + 3x$

$\therefore 0 = x^2 + 3x - 10$

$\therefore 0 = (x+5)(x-2)$

$\therefore x = -5$ of $x = 2$

maar $x \neq -5$, want $x > 0$

(b) $\log_3(x+4) - \log_3 x = \log_3 5$

$\therefore \log_3 \frac{(x+4)}{x} = \log_3 5$

$\therefore \log_3 \frac{(x+4)}{x} = \log_3 5$

$\therefore \frac{(x+4)}{x} = 5$ [Per definisie]

$\therefore x + 4 = 5x$

$\therefore x - 5x = -4$

$\therefore -4x = -4$

$\therefore x = 1$

Vb. 4 Los op vir x: (Gebruik 'n sakrekenaar en gee die antwoorde korrek tot 2 desimale.)

(a) $3^x = 7$

$\therefore \log_3 7 = x$

$\therefore x = \frac{\log 7}{\log 3}$

$\therefore x \approx 1,77$

(b) $1,3 = 2^{x-3}$

$\therefore \log_2 1,3 = x - 3$

$\therefore x - 3 = \frac{\log 1,3}{\log 2}$

$\therefore x - 3 = 0,3785\ldots$

$\therefore x \approx 3,38$

Oefening 1:

(1) Skryf die volgende in logaritmiese vorm:

(a) $7^3 = 343$

$\rightarrow \quad \log_7 343 = 3$

(b) $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\rightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}} x = 2$

(c) $y = 2^{x+1}$

$\rightarrow \quad \log_2 y = x + 1$

(d) $2^{\log x} = 5$

$\rightarrow \quad \log_2 5 = \log x$

(2) Skryf die volgende in eksponensiaal vorm:

(a) $\log_2 32 = 5$

$\rightarrow \quad 2^5 = 32$

(b) $\log y = k$

$\rightarrow \quad 10^k = y$

(c) $m = \log_3 k$

$\rightarrow \quad 3^m = k$

(d) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

$\rightarrow \quad 3^{-3} = \frac{1}{27}$

(3) Skryf die volgende as aparte logaritmes met grondtal 10 as $\{x\,;y\,;t\,;p\} > 0$:

(a) $\log \frac{xy}{p}$

$= \log xy - \log p$

$= \log x + \log y - \log p$

(b) $\log_t p^2 t$

$= 2\log_t p + \log_t t$

$= 2\,\frac{\log p}{\log t} + 1$

(4) Skryf die volgende as 'n enkele logaritme as $\{x\,;y\,;t\,;p\} > 0$:

(a) $\log t - \log y + 2\log p$

$= \log t - \log y + \log p^2$

$= \log \frac{tp^2}{y}$

(b) $\log_2(x-2) - \log_2(x+1) - \log_2 x$

$= \log_2 \frac{(x-2)}{x(x+1)}$

(5) Vereenvoudig, sonder 'n sakrekenaar:

(a) $\log 25 + \log 8 - \log 2$

$= \log(25 \times 8 \div 2)$

$= \log 100$

$= \log 10^2$

$= 2 \log_{10} 10 = 2 \times 1$

$= 2$

(b) $\log_2 16 + 3\log_3\left(\frac{1}{9}\right) - \log_{15} 1$

$= \log_2 2^4 + 3\log_3 3^{-2} - \log_{15} 15^0$

$= 4\log_2 2 + (3 \times -2)\log_3 3 - 0\log_{15} 15$

$= 4 \times 1 + (-6) \times 1 - 0 \times 1 = 4 - 6 - 0$

$= -2$

(c) $\dfrac{\log 32 - \log 243}{\log 3 - \log 2}$

$= \dfrac{\log 2^5 - \log 3^5}{\log 3 - \log 2}$

$= \dfrac{5\log 2 - 5\log 3}{\log 3 - \log 2}$

$= \dfrac{5(\log 2 - \log 3)}{-1(\log 2 - \log 3)}$

$= \dfrac{5\cancel{(\log 2 - \log 3)}}{-1\cancel{(\log 2 - \log 3)}}$

$= -5$

(d) $\dfrac{\log_5 27 \ + \ \log_5 9}{\log_5 \sqrt{3}}$

$= \dfrac{\log_5 27 \times 9}{\log_5 3^{\frac{1}{2}}} \ = \dfrac{\log_5 243}{\frac{1}{2}\log_5 3}$ **of** $= \dfrac{\log_5 3^5}{\frac{1}{2}\log_5 3}$

$= 2 \times \log_3 243$ $= \dfrac{5\log_5 3}{\frac{1}{2}\log_5 3}$

$= 2 \times \log_3 3^5$ $= \dfrac{5\cancel{\log_5 3}}{\frac{1}{2}\cancel{\log_5 3}}$

$= 2 \times 5 \log_3 3 = 2 \times 5$ $= 5 \div \frac{1}{2}$

$= 10$ $= 10$

(e) $\log 8\,000 - \log 8$

$= \log \frac{8\,000}{8}$

$= \log 1\,000$

$= \log 10^3$

$= 3 \log 10$

$= 3 \times 1$

$= 3$

(f) $\frac{1}{2}\log_4 16 \ + \ \log_{0,2} 0{,}04 \ - \ \log_3 \sqrt{27} \ - \ \log 25 \times \log_5 1$

$= \frac{1}{2}\log_4 4^2 \ + \ \log_{0,2}(0,2)^2 \ - \ \log_3 \sqrt{3^3} \ - \ \log 25 \times 0$

$= \frac{1}{2}\log_4 4^2 \ + \ \log_{0,2}(0,2)^2 \ - \ \log_3 \sqrt{3^3} \ - \ \log 25 \times 0$

$= \frac{1}{2} \times 2 \times \log_4 4 \ + \ 2 \times \log_{0,2} 0,2 \ - \ \log_3 3^{\frac{3}{2}} \ - \ 0$

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \ + \ 2 \times 1 \ - \ \frac{3}{2} \times \log_3 3$

$= 1 \ + \ 2 \ - \frac{3}{2} \times 1$

$= 3 \ - \frac{3}{2}$

$= \frac{3}{2}$

(6) Los op vir x: [Waar nodig, rond af tot 2 desimale.]

(a) $\log_4 2x = 3$

$\therefore \quad 4^3 = 2x$

$\therefore \quad 64 = 2x$

$\therefore \quad x = 32$

(b) $\log_3(x + 2) + \log_3 x = 1$

$\therefore \quad \log_3 x(x+2) = 1$ **of** $\log_3 x(x+2) = \log_3 3$

$\therefore \quad 3^1 = x^2 + 2x$ $\leftarrow$ **GG ⟺ GE**

$\therefore \quad 0 = x^2 + 2x - 3$

$\therefore \quad 0 = (x+3)(x-1)$

$\therefore \quad x = -3$ **of** $x = 1$

NVT → Bv. $\log_3 -3$ is ontoelaatbaar volgens definisie

(c) $\log_2(2x + 12) - 2 = \log_2 x$

$\therefore \quad \log_2(2x+12) - 2\log_2 2 = \log_2 x$

$\therefore \quad \log_2(2x+12) - \log_2 2^2 = \log_2 x$

$\therefore \quad \log_2 \frac{(2x+12)}{4} = \log_2 x$

$\therefore \quad \frac{(2x+12)}{4} = x$ $\leftarrow$ **GG ⟺ GE**

$\therefore \quad 2x + 12 = 4x$

$\therefore \quad 12 = 4x - 2x$

$\therefore \quad 2x = 12$

$\therefore \quad x = 6$

(d) $7^{3x} = 14$

$\therefore \quad \log_7 14 = 3x$

$\therefore \quad \frac{\log 14}{\log 7} = 3x$

$\therefore \quad 3x = 1,356 \ldots.$ $\rightarrow$ **Gebruik 'n sakrekenaar**

$\therefore \quad 3x = 1,356 \ldots.$

$\therefore \quad x \approx 0,45$

(7) Skryf die volgende in terme van m en/of n as $\log 6 = m$ en $\log 3 = n$:

(a) $\log 18$

$= \log 3 \times 6$

$= \log 3 + \log 6$

$= m + n$

(b) $\log_{27} 36$

$= \frac{\log 36}{\log 27} = \frac{\log 6^2}{\log 3^3}$

$= \frac{2 \log 6}{3 \log 3}$

$= \frac{2m}{3n}$

(c) $\log 300$

$= \log 3 \times 100$

$= \log 3 + \log 100$

$= \log 3 + \log 10^2 = \log 3 + 2 \log 10$

$= n + 2$

(d) $\log 20$

$= \log \frac{60}{3}$

$= \log 6 \times 10 - \log 3$

$= \log 6 + \log 10 - \log 3$

$= m + 1 - n$

A2.2 Inverses:

Die reël vir die refleksie in die lyn $x = y$ is: $(x; y) \Leftrightarrow (y; x)$
Hierdie refleksie in die lyn $y = x$ word die inverse genoem $\Leftrightarrow$ die x en y ruil dus om!
Die inverse van $f(x)$ word geskryf as $f^{-1}(x)$.

Vb. 5 Bepaal $f^{-1}(x)$ in elk van die volgende in die vorm $f^{-1}(x) = \dots$:

(a) $f(x) = 5x^2$

$\therefore$ Vir f is $y = 5x^2$

$\therefore$ Vir f^{-1} is $x = 5y^2$

$\therefore \quad \frac{x}{5} = y^2$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{\frac{x}{5}}$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{x}{5}}$

(b) $f: x \to \frac{3}{x+2}$

$\therefore$ Vir f is $y = \frac{3}{x+2}$

$\therefore$ Vir f^{-1} is $x = \frac{3}{y+2}$

$\therefore \quad y + 2 = \frac{3}{x}$

$\therefore \quad y = \frac{3}{x} - 2$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{3}{x} - 2$

<u>Oefening 2</u>:

(1) Bepaal f^{-1} van die volgende en skryf dit in die vorm $f^{-1}(x) = \dots\dots$

(a) $f(x) = 3x - 4 \quad \to \quad y = 3x - 4$

f^{-1}: $\quad x = 3y - 4$

$\therefore \quad 3y = x + 4$

$\therefore \quad y = \frac{x+4}{3}$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$

(b) $f(x) = 5^x \quad \to \quad y = 5^x$

f^{-1}: $\quad x = 5^y$

$\therefore \quad y = \log_5 x$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \log_5 x$

(c) $f(x) = -2x^2 \quad \to \quad y = -2x^2$

f^{-1}: $\quad x = -2y^2$

$\therefore \quad y^2 = \frac{x}{-2}$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{-\frac{x}{2}}$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = y = \pm\sqrt{-\frac{x}{2}}$

(d) $f(x) = \log_{0,5} x \quad \to \quad y = \log_{0,5} x$

f^{-1}: $\quad x = \log_{0,5} y$

$\therefore \quad y = 0,5^x$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = 0,5^x$

(2) Bepaal g^{-1} van die volgende en skryf dit in die vorm $g^{-1}: x \rightarrow$ …….

(a) $g : x \rightarrow \frac{x}{4} \quad \rightarrow \quad y = \frac{x}{4}$

g^{-1}: $\quad x = \frac{y}{4}$

$\therefore \quad y = 4x$

$\therefore \quad g^{-1}: x \rightarrow 4x$

(b) $g : x \rightarrow \log_3 x \quad \rightarrow \quad y = \log_3 x$

g^{-1}: $\quad x = \log_3 y$

$\therefore \quad y = 3^x$

$\therefore \quad g^{-1}: x \rightarrow 3^x$

(c) $g : x \rightarrow 3^{x+1} \quad \rightarrow \quad y = 3^{x+1}$

g^{-1}: $\quad x = 3^{y+1}$

$\therefore \quad y + 1 = \log_3 x$

$\therefore \quad y = \log_3 x - 1$

$\therefore \quad g^{-1}: x \rightarrow \log_3 x - 1$

(d) $g : x \rightarrow -0{,}5x \quad \rightarrow \quad y = -0{,}5x$

g^{-1}: $\quad x = -0{,}5y$

$\therefore \quad y = \frac{x}{-0{,}5}$

$\therefore \quad g^{-1}: x \rightarrow -\frac{x}{0{,}5}$

(3) Bepaal h van die volgende en skryf dit in die vorm $h(x) =$ …….

(a) $h^{-1}(x) = \log_7 x \quad \rightarrow \quad y = \log_7 x$

h: $\quad x = \log_7 y$

$\therefore \quad y = 7^x$

$\therefore \quad h(x) = 7^x$

(b) $h^{-1}(x) = \frac{x-2}{3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{x-2}{3}$

h: $\quad x = \frac{y-2}{3}$

$\therefore \quad 3x = y - 2$

$\therefore \quad y = 3x + 2$

$\therefore \quad h(x) = 3x + 2$

(c) $h^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{4}x^2$

h: $\quad x = \frac{1}{4}y^2$

$\therefore \quad 4x = y^2$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{4x}$

$\therefore \quad h(x) = \pm\sqrt{4x}$

(d) $h^{-1}(x) = \log x \quad \rightarrow \quad y = \log x$

h: $\quad x = \log y$

$\therefore \quad y = 10^x$

$\therefore \quad h(x) = 10^x$

(4) Beskou die volgende: $p(x) = \{(1;7)\,;(2;8)\,;(3:9)\,;(4;10)\}$

(a) Is p 'n funksie? Motiveer jou antwoord.

Ja, p is 'n funksie, want geen x-koördinaat word herhaal nie.

(b) Skryf die waardeversameling neer van $p^{-1}(x)$.

$\mathbf{W_{p^{-1}} = \{1;2;3;4\}}$ $\rightarrow$ $\mathbf{W_{p^{-1}} = D_p}$

(5) Verduidelik die verskil tussen $f^{-1}(x)$ en $\left(f(x)\right)^{-1}$.

$f^{-1}(x)$ is die inverse van 'n funksie en $\left(f(x)\right)^{-1}$ is die resiprook van die funksie.

$\therefore$ **As $f(x) = 2x$, dan is** $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ **en** $\left(f(x)\right)^{-1} = \frac{1}{2x}$.

$\rightarrow$ $y = 2x$ $\rightarrow$ **Vir** f^{-1}: $x = 2y$

A2.3 Grafieke van inverses:
A2.3.1 Grafieke van inverses van die reguit lyn:

Sien graad 11 Lineêre Funksies vir hersiening en agtergrond!

Indien die funksie $f(x) = mx + c$ gegee word, sal die inverse as volg verkry word:

$f(x) = mx + c \iff y = mx + c$

$\therefore$ Vir die inverse ruil die x en y om: $x = my + c$

$\Rightarrow y = \frac{x - c}{m}$ [Maak y die onderwerp!]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x - c}{m}$ $\Rightarrow$ Inverse funksie

Vb. 6 Gegee: $g(x) = 2x - 4$

(a) Bepaal $g^{-1}(x) = \ldots..$

(b) Skets $g(x)$ en $g^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel.

(a) $g(x)$: $y = 2x - 4$

$\iff \therefore g^{-1}(x)$: $x = 2y - 4$

$\therefore 2y = x + 4$

$\therefore y = \frac{1}{2}x + 2$

$\therefore g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$

(b) **Vir** $g(x)$: x-**afsnit** $(y = 0)$ y-**afsnit** $(x = 0)$

$$2x - 4 = 0 \qquad\qquad y = 2(0) - 4$$

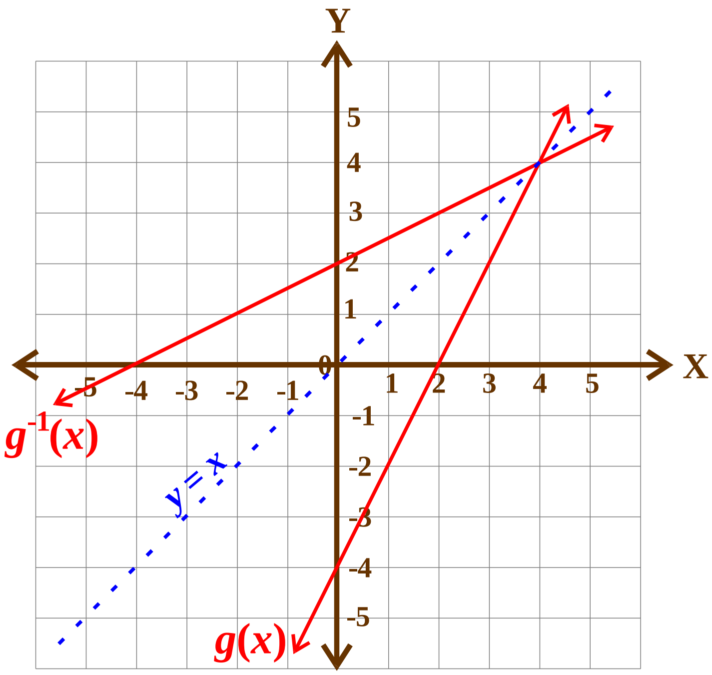
$$\therefore \; x = 2 \qquad\qquad \therefore \; y = -4$$

$$\therefore \; (2\,;0) \quad \textbf{en} \quad (0\,;-4)$$

Vir $g^{-1}(x)$: x **en** y **van** $g(x)$ **ruil om:**

y-**afsnit** $(x = 0)$ x-**afsnit** $(y = 0)$

$$\therefore \; (0\,;2) \quad \textbf{en} \quad (-4\,;0)$$



A2.3.2 Grafieke van inverses van die parabool:

Sien graad 11 Kwadratiese Funksies vir hersiening en agtergrond!

Vb. 7 Gegee: $g(x) = 2x^2$ met $x \geq 0$

(a) Bepaal $g^{-1}(x) = \ldots\ldots$

(b) Skets $g(x)$ en $g^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel.

(c) Skryf die definisieversameling van $g^{-1}(x)$ neer.

(a) $g(x)$: $y = 2x^2$ met $x \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\therefore$ $g^{-1}(x)$: $x = 2y^2$ met $y \geq 0$

$\therefore \quad y^2 = \frac{x}{2}$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{\frac{x}{2}}$

maar $y \geq 0$

$\therefore \quad g^{-1}(x) = +\sqrt{\frac{x}{2}}$

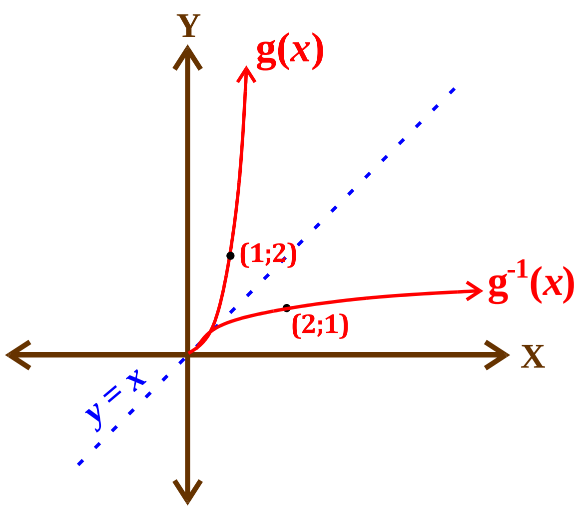
(b) Vir $g(x)$: Gebruik 'n tabel, want die x-en-y afsnitte en die draaipunt is $(0; 0)$.

x	0	1	2
y	0	2	8

$x \geq 0$

Vir $g^{-1}(x)$: x en y van $g(x)$ ruil om:

x	0	2	8
y	0	1	2



(c) $D_{g^{-1}}$: $x \geq 0$

A2.3.3 Grafieke van inverses van die eksponensiaal funksie:

Sien graad 11 Eksponensiaal Funksies vir hersiening en agtergrond!

Indien die funksie $f(x) = a^x$ gegee word, sal die inverse as volg verkry word:

$f(x) = a^x \iff y = a^x$

$\therefore$ Vir die inverse ruil die x en y om: $x = a^y$

$\Rightarrow y = \log_a x$ [Maak y die onderwerp!]

$\therefore$ Die inverse van 'n eksponensiaal funksie is 'n logaritmiese funksie.

Vb. 8 Gegee: $g(x) = 2^x$

(a) Bepaal $g^{-1}(x) = \ldots..$

(b) Skets $g(x)$ en $g^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel.

(c) Skryf die vergelyking van $g^{-1}(x)$ se asimptoot neer.

(a) $g(x)$: $y = 2^x \iff \therefore g^{-1}(x)$: $x = 2^y$

$\therefore y = \log_2 x$

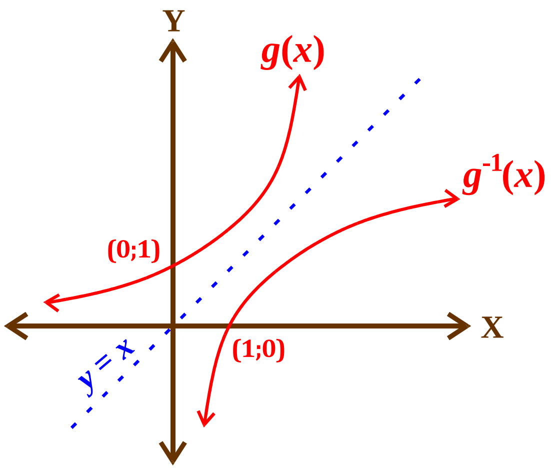
$\therefore g^{-1}(x) = \log_2 x$

(b) Vir $g(x)$:

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{2}$	1	2

Vir $g^{-1}(x)$: x en y van $g(x)$ ruil om:

x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-1	0	1



(c) Asimptoot van $g^{-1}(x)$:

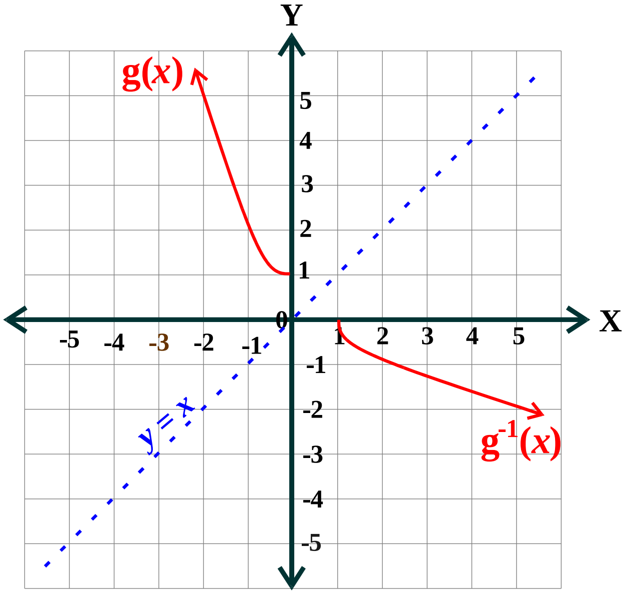
$x = 0$

Oefening 3:

(1) (a) Skets: $g(x) = x^2 + 1$ vir $x \leq 0$.

x	0	-1	-2
y	1	2	5

$x \leq 0$



(b) Bepaal g^{-1} en skryf dit in die vorm $g^{-1}(x) = \ldots\ldots$ $g(x) = x^2 + 1 = y$

g^{-1}: $y^2 + 1 = x$ vir $y \leq 0$

$\therefore \quad y^2 = x - 1$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{x-1} \rightarrow g^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$

(c) Skets $g^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel as $g(x)$.

x	1	2	5
y	0	-1	-2

$y \leq 0$

(d) Skryf $g^{-1}(x)$ se waardeversameling neer.

$W_{g^{-1}}$: $y \leq 0$

(2) Gegee: $h(x) = 2^{-x}$ $\rightarrow$ $h(x) = 2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = y$

(a) Bepaal h^{-1} en skryf dit in die vorm $h^{-1}(x) = \ldots\ldots$

h^{-1}: $\left(\frac{1}{2}\right)^y = x$

$\therefore \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x$

$\therefore \quad h^{-1} = \log_{\frac{1}{2}} x$

(b) Skets h en h^{-1} op dieselfde assestelsel.

$\boldsymbol{h}$:

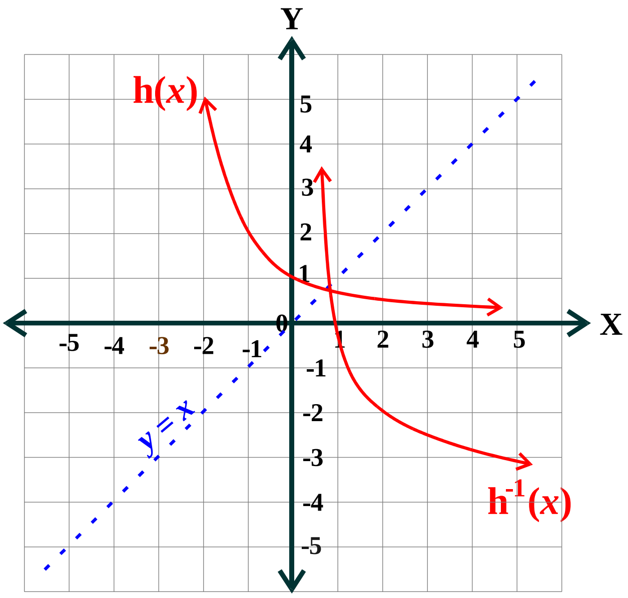
x	-1	0	1
y	2	1	$\frac{1}{2}$

Asimptoot: $y = 0$

$\boldsymbol{h^{-1}}$:

x	2	1	$\frac{1}{2}$
y	-1	0	1

Asimptoot: $x = 0$



(c) Skryf $h^{-1}(x)$ se definisieversameling neer. $\mathbf{D_{h^{-1}}}$**:** $\boldsymbol{x > 0}$

(d) As p die refleksie van h in die y-as is, bepaal die vergelyking van p en skryf dit in die vorm $p(x) = \ldots\ldots$

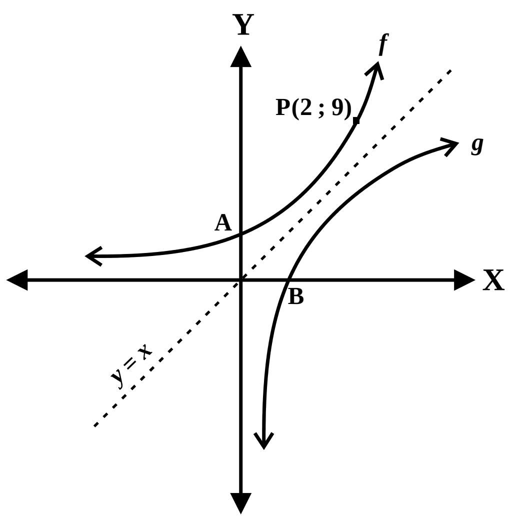
$$p(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$$

$\therefore \quad \boldsymbol{p(x) = 2^x}$

(e) Bepaal p^{-1} en skryf dit in die vorm $p^{-1}(x) = \ldots\ldots$

$\therefore \quad \boldsymbol{p^{-1}(x) = \log_2 x}$

(3) Gegee: $f(x) = a^x$ en $g(x)$ met $\mathrm{P}(2; 9)$.



(a) Bepaal die waarde van a.

$y = f(x) = a^x$ **deur** $\overset{x}{\mathrm{P}}(2\,;\overset{y}{9})$

$\therefore \quad 9 = a^2$

$\therefore \quad \boldsymbol{a = 3} \quad \rightarrow \quad a > 0$

(b) Gee die koördinate van A.

A(0; 1)

(c) Bepaal die vergelyking van $g(x)$, as $g(x)$ die spieëlbeeld is van $f(x)$ in die lyn $y = x$.

$\boldsymbol{g(x)}$ **is** $\boldsymbol{f(x)}$ **se inverse met** $\boldsymbol{f(x) = y = 3^x}$

$\therefore$ **vir** $\boldsymbol{g}$**:** $\boldsymbol{x = 3^y}$

$\therefore$ $\boldsymbol{y = g(x) = \log_3 x}$

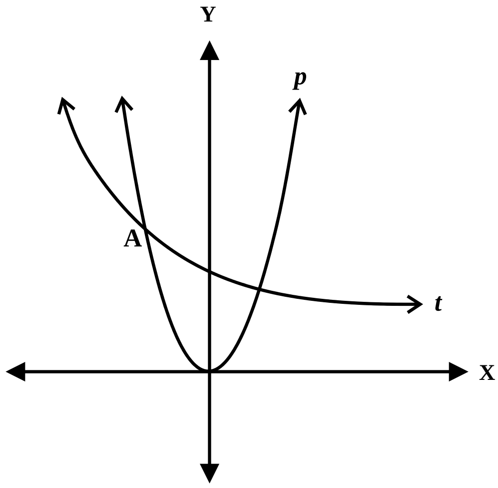
(d) Gee die koördinate van B. **B(1; 0)**

(e) Vir watter waardes van x is $g(x)$ gedefinieer?

Gedefinieerd → Definisieversameling $\therefore$ $\boldsymbol{D_g: \quad x > 0}$

(f) Skryf die vergelyking van $g(x)$ se asimptoot neer. $\boldsymbol{y}$**-as** → $\boldsymbol{x = 0}$

(4) Gegee: $t(x) = a^x$ en $p(x) = bx^2$
met A$(-2; 4)$.



(a) Bepaal die waardes van a en b.

$\boldsymbol{t(x) = y = a^x}$ **deur** $\boldsymbol{A(\overset{x}{-2}\,;\overset{y}{4})}$

$\therefore \quad \boldsymbol{4 = a^{-2}}$

$\therefore \quad \boldsymbol{4 = \frac{1}{a^2}}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a^2 = \frac{1}{4}}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$ → $\boldsymbol{a > 0}$

$\boldsymbol{p(x) = y = bx^2}$ **deur** $\boldsymbol{A(\overset{x}{-2}\,;\overset{y}{4})}$

$\therefore \quad \boldsymbol{4 = b(-2)^2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{4 = b(-2)^2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{4 = b(4)}$

$\therefore \quad \boldsymbol{b = 1}$

(b) Skryf die volgende neer: $t^{-1}(x) = \ldots\ldots$

$\boldsymbol{t(x) = y = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$

Vir $\boldsymbol{t^{-1}(x)}$: $\boldsymbol{x = \left(\frac{1}{2}\right)^y}$

$\therefore \quad \boldsymbol{y = \log_{\frac{1}{2}} x}$

$\therefore \quad \boldsymbol{t^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x}$

(c) Skryf die volgende neer: $p^{-1}(x) = \ldots\ldots$

$\boldsymbol{p(x) = 1x^2}$ → $\boldsymbol{y = x^2}$

Vir $\boldsymbol{p^{-1}(x)}$: $\boldsymbol{x = y^2}$

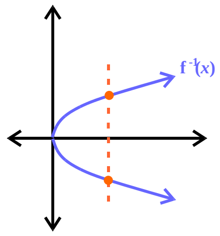
$\therefore \quad \boldsymbol{y = \pm\sqrt{x}}$

$\therefore \quad \boldsymbol{p^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}}$

(d) Verduidelik hoekom $p^{-1}(x)$ nie 'n funksie is nie.

Want $p^{-1}(x)$ is nie een-eenduidig nie.

Sien skets.

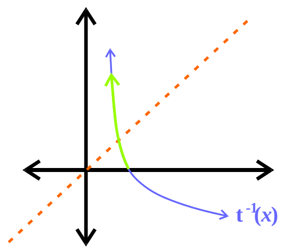


(e) Bepaal x waarvoor $t^{-1}(x) \geq 0$.

$\therefore \quad y \geq 0$

$\therefore \quad 0 < x \leq 1$

Sien in groen die oplossing.



(f) Bereken: $t^{-1}(0{,}25) + p(3)$

$= \log_{\frac{1}{2}} 0,25 + (3)^2$

$= 2 + 9$

$= 11$

(5) Die grafiek van $f(x) = a^x$ is langsaan geskets.

Die punt $B(3; 8)$ lê op die grafiek van f.

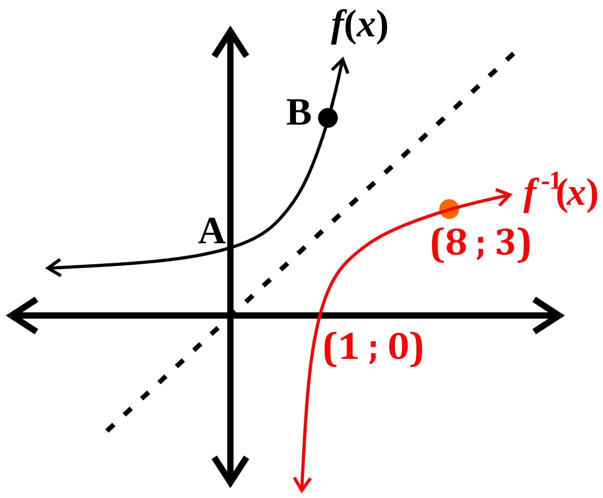
(a) Toon aan dat $a = 2$ is.

$f(x) = y = a^x$ **deur** $B(\overset{x}{3} ; \overset{y}{8})$

$\therefore \quad 8 = a^3$

$\therefore \quad 2^3 = a^3$

$\therefore \quad a = 2$ **GG $\Leftrightarrow$ GE**



(b) Skryf die koördinate van A neer.

$A(0; 1)$ want $y = 2^0 = 1$

(c) Skryf die vergelyking van $f^{-1}(x)$

in die vorm $f^{-1}(x) = \cdots$ neer.

$f(x) = y = 2^x$

Vir $f^{-1}(x)$: $x = 2^y$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = y = \log_2 x$

(d) Skets die grafiek van f^{-1}.

Dui die x-afsnit en EEN ander punt aan. **Sien skets.**

(e) Vir watter waardes van x sal $f^{-1}(x) = f(x)$?

Geen $\rightarrow$ $f^{-1}(x)$ **en** $f(x)$ **sny mekaar nie.**

(f) Skryf die vergelyking van g neer as g die refleksie is van f in die y-as.

$\boldsymbol{g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$ **of** $\boldsymbol{g(x) = 2^{-x}}$

(g) Skryf die vergelyking van h neer as h die refleksie is van f^{-1} in die x-as.

$\boldsymbol{h(x) = -\log_2 x}$

(h) Is g en h mekaar se inverse? Motiveer jou antwoord.

Ja, **want** $\boldsymbol{g(x) = y = 2^{-x}}$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{g^{-1}}$: $\boldsymbol{x = 2^{-y}}$

$\therefore \quad \boldsymbol{-y = \log_2 x}$

$\therefore \quad \boldsymbol{y = -\log_2 x = h(x)}$

(i) Vir watter waardes van x sal $f^{-1}(x) \geq 0$? $\rightarrow$ $\boldsymbol{y \geq 0}$ **vir** $\boldsymbol{f^{-1}}$

$\therefore \ \boldsymbol{x \geq 1}$

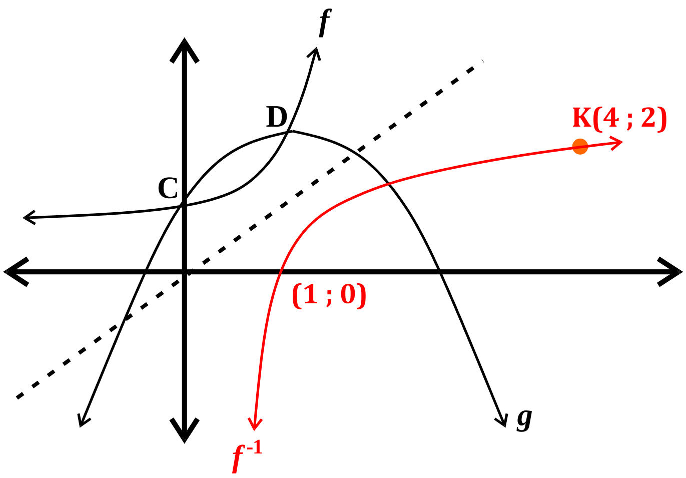
(j) Bereken: $f^{-1}(2) + f(-2)$

$= \boldsymbol{\log_2 2 + 2^{-2}}$

$= \boldsymbol{1 + \frac{1}{2^2}}$

$= \boldsymbol{1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}}$

(6) Langsaan is die grafieke van $f(x) = 2^x$ en $g(x) = -(x-1)^2 + b$ geskets, waar b 'n konstante is. Die grafieke van f en g sny die y-as by C. D is die draaipunt van g.



(a) Dui aan dat $b = 2$.

C is die $\boldsymbol{y}$-afsnit van beide $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{g}$.

Vir $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = 2^x}$ **met** $\boldsymbol{x = 0}$ $\rightarrow$ **vir $\boldsymbol{y}$-afsnit**

$\therefore \quad \boldsymbol{y = 2^0 = 1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{C(0;1)}$

Vir $\boldsymbol{g}$: $\boldsymbol{y = -(x-1)^2 + b}$ **deur** $\mathbf{C}\overset{\boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{y}}{\mathbf{(0\,;1)}}$

$\therefore \quad \boldsymbol{1 = -(0-1)^2 + b}$

$\therefore \quad \boldsymbol{1 = -(-1)^2 + b}$

$\therefore \quad \boldsymbol{1 = -1 + b}$

$\therefore \quad \boldsymbol{b = 2}$

(b) Skryf die koördinate van die draaipunt van g neer. **DP: $(1; 2)$**

(c) Skryf die vergelyking van $f^{-1}(x)$ in die vorm $y = \ldots\ldots$ neer.

$$f^{-1}(x) = y = \log_2 x$$

(d) Skets die grafiek van f^{-1} op die grafiek hierbo.
Dui op jou grafiek die x-afsnit en die koördinate van een ander punt aan.

Sien grafiek!

Ander punt: As $x = 4 \rightarrow \quad y = \log_2 4 = 2$

$\therefore$ **K$(4; 2)$**

(e) Skryf die vergelyking van h neer indien $h(x) = g(x + 1) - 2$.

$$h(x) = \left[-\left((x+1)-1\right)^2 + 2\right] - 2$$

$$h(x) = [-(x+1-1)^2 + 2] - 2$$

$$h(x) = [-(x)^2 + 2] - 2$$

$$h(x) = -x^2 + 2 - 2$$

$$h(x) = -x^2$$

(f) Hoe kan die definisieversameling (gebied) van h beperk word sodat h^{-1} 'n funksie sal wees?

Vir h^{-1} om 'n funksie te wees moet die definisie versameling van h as volg beperk word:

$x \leq 0$ **kan ook wees** $x \geq 0$

$\rightarrow$ **Die waardeversameling van h^{-1} sal as volg wees:**

$y \leq 0$ **of** $y \geq 0$

(g) Bepaal die maksimum waarde van $2^{2-(x-1)^2}$.

Die maksimum waarde van $2^{2-(x-1)^2}$ sal wees by die maksimum waarde van $[2 - (x - 1)^2]$

$\therefore \quad 2 - (x - 1)^2 = -(x - 1)^2 + 2$

$\rightarrow$ **maksimum waarde is 2** $\Longrightarrow$ **lees af by die draaipunt $(1\,; 2)$**

$\therefore$ **maksimum waarde van $2^{2-(x-1)^2} = 2^2$**

$\therefore$ **maksimum waarde van $2^{2-(x-1)^2} = 4$**

<u>HERSIENING UIT OU VRAESTELLE</u>:

<u>Oefening A</u>:

Beskou die funksie $f(x) = y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \rightarrow \quad y = 3^{-x}$

(1) Is f 'n stygende of 'n dalende funksie? Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)

Dalende funksie ✓ **Rede: $0 < a < 1$** ✓ **of** **Soos x toeneem, neem $f(x)$ af.**

(2) Bereken $f^{-1}(x)$ in die vorm $y = \ldots\ldots..$ (2)

$f^{-1}(x)$: $x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$ ✓ of $x = 3^{-y}$

$\therefore \quad y = \log_{\frac{1}{3}} x$ ✓ $\therefore \quad y = -\log_3 x$

(3) Skryf die vergelyking neer van $f(x) - 5$ se asimptoot. (1)

$y = -5$ ✓

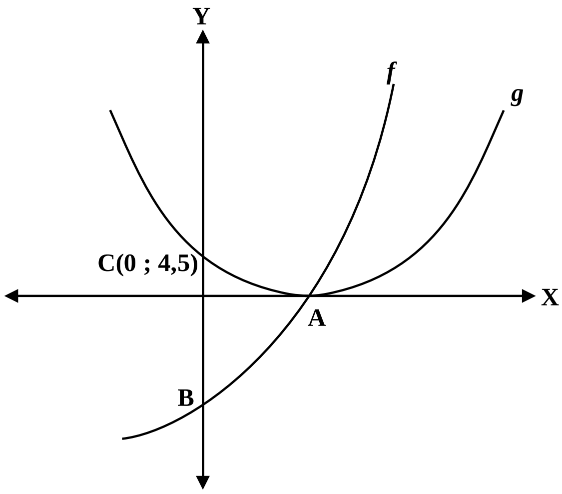
(4) Beskryf die transformasie van f na g as $g(x) = \log_3 x$. (2)

'n Refleksie in die lyn $y = x$ gevolg deur 'n refleksie in die x-as. ✓✓

of **'n Refleksie in die y-as gevolg deur 'n refleksie in die lyn $y = x$.**

Oefening B:

Die grafieke van $f(x) = 2^x - 8$ en $g(x) = ax^2 + bx + c$ is hieronder geteken. B en C$(0; 4{,}5)$ is die y-afsnitte van die grafieke van f en g onderskeidelik. Die twee grafieke sny by A, wat die draaipunt van die grafiek van g en die x-afsnit van die grafieke van f en g.



(1) Bepaal die koördinate van A en B. (4)

A: x-afsnit van g → $y = 0$

$\rightarrow\ 0 = 2^x - 8$ ✓

$\rightarrow\ 8 = 2^3 = 2^x$

$\rightarrow\ \therefore\ x = 3$

$\therefore\ \mathbf{A(3\,;0)}$ ✓

B: y-afsnit van g → $x = 0$

$\rightarrow\ y = 2^0 - 8$ ✓

$\rightarrow\ y = 1 - 8$

$\rightarrow\ y = -7$

$\therefore\ \mathbf{B(0\,;-7)}$ ✓

(2) Skryf die vergelyking van die asimptoot van die grafiek van f neer. (1)

$y = -8$ ✓

(3) Bepaal die vergelyking van h as $h(x) = f(2x) + 8$. (2)

$h(x) = f(2x) + 8 = 2^{2x} - 8 + 8$ ✓ $\rightarrow$ $h(x) = 2^{2x} = 4^x$ ✓

(4) Bepaal die vergelyking van h^{-1} in die vorm $y = \ldots..$ (2)

$h^{-1}:$ ✓ $x = 4^y$ $\rightarrow$ $y = \log_4 x$ ✓

(5) Skryf die vergelyking van p neer, as p die refleksie van h^{-1} om die x-as is. (1)

$p(x) = -\log_4 x$ of $p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ ✓

(6) Bereken $\sum_{k=0}^{3} g(k) - \sum_{k=4}^{5} g(k)$. Toon ALLE berekenings. (4)

$= [g(0) + g(1) + g(2) + g(3)] - [g(4) + g(5)]$ ✓

$= g(0) + g(1) + g(2) + g(3) - g(4) - g(5)$ **met $x = 3$ die lyn van simmetrie**

$= g(0) + g(3)$ ✓ **want** $g(1) = g(5)$ **en** $g(2) = g(4)$

$= 4,5 - 0$ ✓ → **Gegee C$(0\,;4,5)$ en bereken in (a) A$(3\,;0)$**

$= 4,5$ ✓

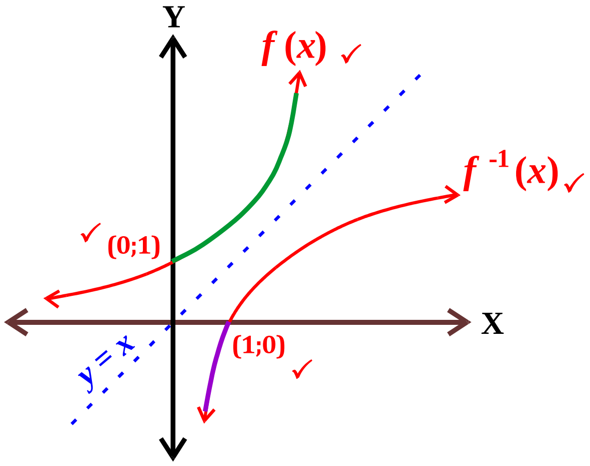
<u>Oefening C</u>:

Gegee: $f(x) = 3^x$

(1) Bepaal 'n vergelyking vir f^{-1} in die vorm $f^{-1}(x) = \ldots$ (1)

$f^{-1}(x) = \log_3 x$ ✓

(2) Skets die grafieke van f en f^{-1}, en toon ALLE snypunte met die asse duidelik aan. (4)



(3) Skryf die definisieversameling van f^{-1} neer. (2)

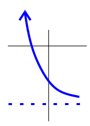
$D_{f^{-1}}: x > 0$ **of** $x \in (0\,;\infty)$ ✓✓

(4) Vir watter waardes van x sal $f(x).f^{-1}(x) \leq 0$ wees? (2)

$0 < x < 1$ ✓✓ **waar $f(x) > 0$ en $f^{-1}(x) < 0$**

(5) Skryf die waardeversameling van $h(x) = 3^{-x} - 4$ neer. (2)

$W_h: y > -4$ **of** $y \in (-4\,;\infty)$ ✓✓

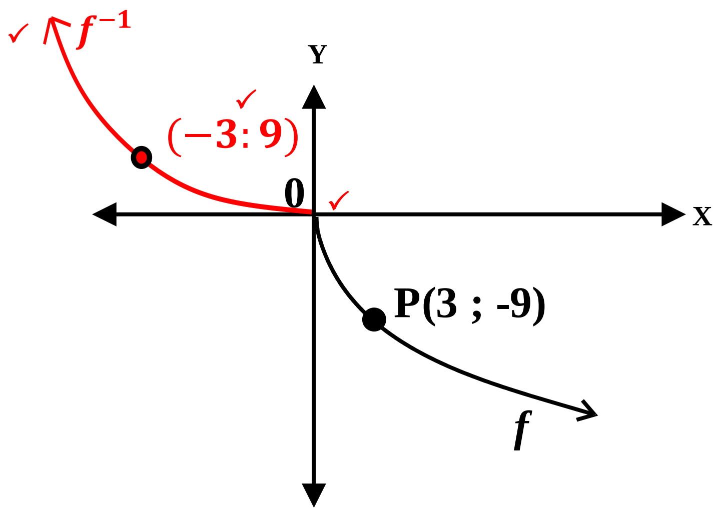


(6) Skryf 'n vergelyking van g neer as die grafiek van g die beeld van die grafiek van f is nadat f twee eenhede na regs getransleer is en om die x-as gereflekteer is. (2)

$\boldsymbol{g(x) = -3^{x-2}}$ ✓✓

Oefening D:

Die grafiek van $f(x) = -\sqrt{27x}$ vir $x \geq 0$ is hieronder geskets.
Die punt P(3 ; −9) lê op die grafiek van f.



(1) Gebruik die grafiek om die waardes van x te bepaal waarvoor $f(x) \geq -9$. (2)

$\boldsymbol{0 \leq x \leq 3}$ ✓✓ **Vir $0 < x < 3$ slegs 1 punt**

(2) Skryf die vergelyking van f^{-1} neer in die vorm $y = \ldots..$ Dui ALLE beperkings aan. (3)

$\boldsymbol{f^{-1}:}$ $\quad \boldsymbol{x = -\sqrt{27y}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{(x)^2 = \left(-\sqrt{27y}\right)^2}$ ✓

$\therefore \quad \boldsymbol{x^2 = 27y}$

✓ ✓

$\therefore \quad \boldsymbol{y = \frac{x^2}{27} = \frac{1}{27}x^2}$ **vir** $\boldsymbol{x \leq 0}$ **of** $\boldsymbol{x \in (-\infty\,;0)}$

(3) Skets f^{-1}, die inverse van f. Dui die afsnitte met die asse en die koördinate van EEN ander punt duidelik aan op die skets. (3)

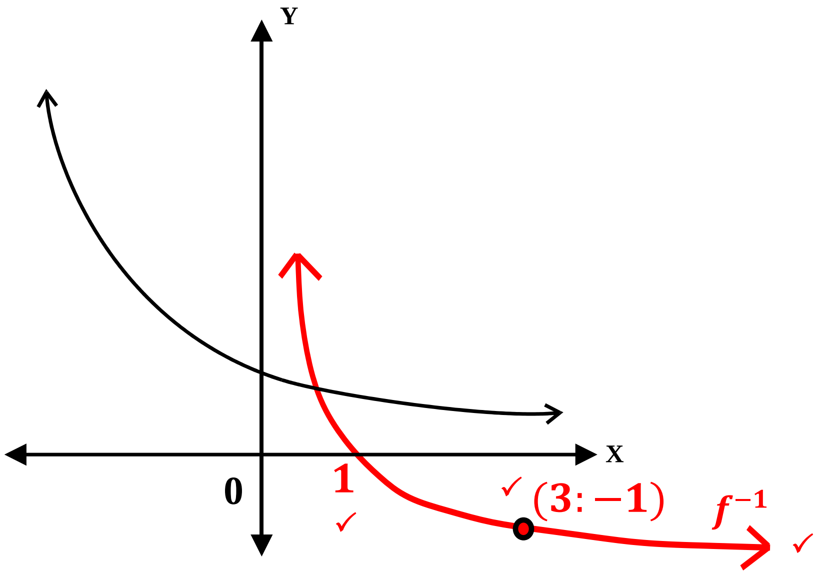
Sien skets hierbo!

(4) Beskryf die transformasie van f na g as $g(x) = \sqrt{27x}$ vir $x \geq 0$. (1)

Refleksie om die x-as **of** $\boldsymbol{(x\,;y) \rightarrow (x:-y)}$ **vir** $\boldsymbol{x \geq 0}$ ✓

Oefening E:

Die grafiek van $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ is hieronder geskets.



(1) Skryf die definisieversameling van f neer. (1)

$\mathbb{R}$ **of** $x \in (-\infty\,;\infty)$ ✓

(2) Skryf die vergelyking van die asimptoot van f neer. (1)

$y = 0$ ✓

(3) Skryf die vergelyking van f^{-1} in die vorm $y = \ldots\ldots$ neer. (2)

f^{-1}: $x = \left(\frac{1}{3}\right)^y = 3^{-y}$ ✓ → $y = \log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$ ✓

(4) Skets die grafiek van f^{-1}. Dui die x-afsnit en EEN ander punt aan. **Sien skets hierbo!** (3)

(5) Skryf die vergelyking van die asimptoot van $f^{-1}(x+2)$ neer. (2)

$x = -2$ ✓✓ **Grafiek skuif twee eenhede na links**

(6) Bewys dat: $[f(x)]^2 - [f(-x)]^2 = f(2x) - f(-2x)$ vir alle waardes van x. (3)

$\text{LK} = [f(x)]^2 - [f(-x)]^2 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^2 - \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}\right]^2$ ✓

$\therefore \quad \text{LK} = 3^{-2x} - 3^{2x}$ ✓

$\text{RK} = f(2x) - f(-2x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$ ✓

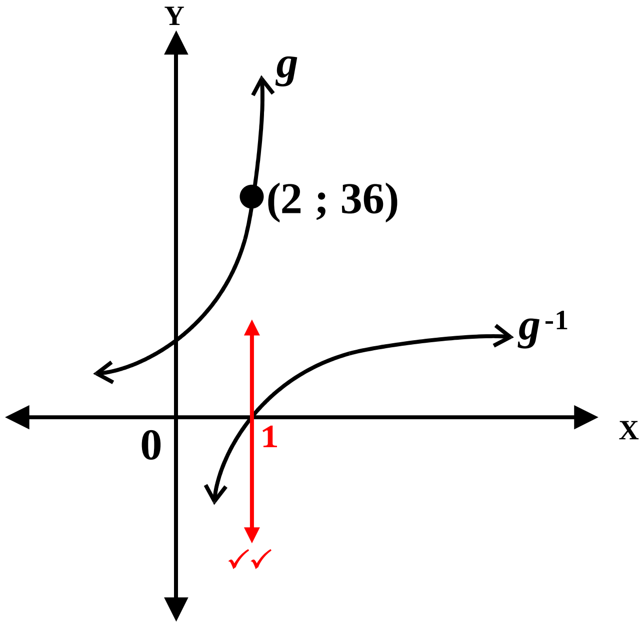
$\therefore \quad \text{RK} = 3^{-2x} - 3^{2x}$

$\therefore \text{LK} = \text{RK}$

$\therefore \quad [f(x)]^2 - [f(-x)]^2 = f(2x) - f(-2x)$

Oefening F:

Die grafieke van $g(x) = k^x$, waar $k > 0$ en $y = g^{-1}(x)$ is hieronder geskets. Die punt $(2; 36)$ is 'n punt op g.



(1) Bepaal die waarde van k. (2)

$g(x) = k^x \quad \rightarrow \quad y = k^x \quad \rightarrow \quad 36 = k^2$ ✓ $\quad \therefore \quad k = 6$ ✓ $(k > 0)$

(2) Gee die vergelyking van g^{-1} in die vorm $y = \ldots\ldots$ (2)

$g^{-1}: \quad x = 6^y$ ✓ $\quad \rightarrow \quad y = \log_6 x$ ✓

(3) Vir watter waarde(s) van x is $g^{-1}(x) \leq 0$? (2)

$0 < x \leq 1$ **of** $x \in (0\,; 1]$
✓ ✓

(4) Skryf die definisieversameling van h neer, indien $h(x) = g^{-1}(x - 3)$. (1)

$x > 3$ **of** $x \in (3\,; \infty)$ ✓

(5) Skets die grafiek van die inverse van $y = 1$. **Sien skets hierbo!** (2)

$y = 1$ **se inverse** $\rightarrow \quad x = 1$

(6) Is die inverse van $y = 1$ 'n funksie? Motiveer jou antwoord. (2)

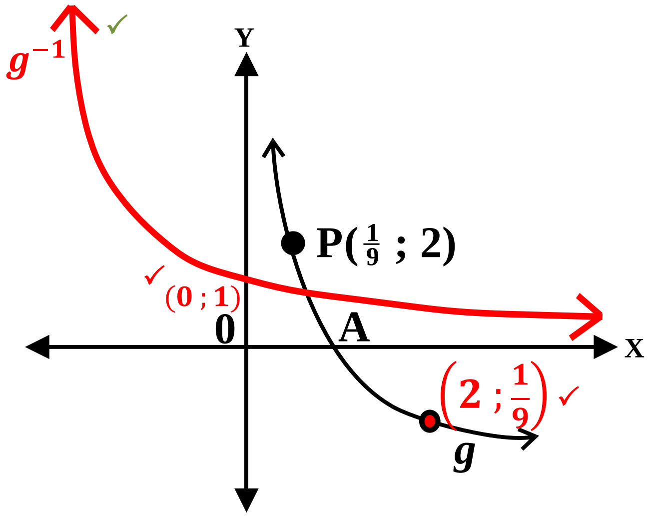
Nee, $x = 1$ is nie 'n funksie nie, want die lyn is nie een-een duidig nie. ✓✓

<u>Oefening G</u>:

(1) Gegee die grafiek van $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

A is die x-afsnit van g.

$P\left(\frac{1}{9}\,; 2\right)$ is 'n punt op g.



(1) Skryf die koördinate van A neer. (1)

A(1 ; 0) ✓

(2) Skets die grafiek van g^{-1} en dui 'n afsnit met die asse aan sowel as EEN ander punt wat op die grafiek sal lê. **Sien grafiek hierbo!** (3)

(3) Skryf die definisieversameling van g^{-1} neer. (1)

$\mathbb{R}$ **of** $x \in (-\infty\,;\infty)$ ✓