

Graad 12 – Boek C

(Eerste KABV uitgawe)

INHOUD:

	<u>Bladsy:</u>
C1. Trigonometrie	3
C2. Data hantering	135

Hierdie boek is opgestel en verwerk deur E.J. Du Toit in 2023.

Webtuiste: www.abcbooks.co.za

Kopiereg © 2023. Alle kopiereg word voorbehou. Geen deel van hierdie publikasie mag in enige vorm gereproduseer word nie; tensy skriftelike toestemming daarvoor verkry is.

MET SPESIALE DANK EN ERKENNING AAN DIE DEPARTEMENT VAN ONDERWYS VIR DIE GEBRUIK VAN UITTREKSELS UIT OU VRAESTELLE.

ISBN 978-1-928336-53-2

Besoek ook www.abcmathsandscience.co.za vir ekstra oefeninge, toetse en vraestelle.

Hoofstuk C2

Data hantering

C2.1 Hersiening graad 11:

C2.1.1 Meting van sentrale neigings:

- * Modus: Waarde wat die **meeste** voorkom. By gegroepeerde data is die modale klas, die klas met die hoogste frekwensie.
- * Mediaan: Die **middelste** waarde van die gerangskikte data.
- * Gemiddelde: Die totaal van al die waardes gedeel deur die aantal inskrywings in die betrokke stel data. Die formule $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ met \bar{x} die gemiddeld, Σ beteken som van, x is al die waardes in die data stel en n is die aantal inskrywings. By gegroepeerde data word die formule $\bar{x} = \frac{\sum fx}{n}$ gebruik met fx die produk die frekwensie en die klasmiddelpunt van elke klas.

C2.1.2 Verspreiding van data:

- * Variasiewydte: (Hoogste telling – laagste telling). Ook omvang of reikwydte genoem.
- * Mediaan: Verdeel die geordende data in twee helftes.
- * Kwartiele: Verdeel die geordende data in 4 kwarte. Elke twee kwarte word geskei deur 'n kwartiel:
 - Die onderste kwartiel (Q_1) is tussen die eerste en tweede kwart.
 - Die middelste kwartiel (Q_2) of beter bekend as die mediaan (M) is tussen die tweede en derde kwarte en verdeel dus die data in twee ewe groot stelle data.
 - Die boonste kwartiel (Q_3) is tussen die derde en vierde kwart.
- * Desiele: Dit verdeel die geordende data in tien gelyke groepe.
Die mediaan is die 5^{de} desiel.
- * Persentiele: Dit verdeel die geordende data in 100 gelyke groepe.
Die mediaan is die 50^{ste} persentiel.

Indien daar uitskieters in die data is, is die variasiewydte nie 'n goeie meting van verspreiding is nie; dan maak ons gebruik van die interkwartielvariasiewydte (IKV). Die IKV is dus gebaseer op die verspreiding van die middelste helfte van die data rondom die mediaan.

$$\therefore \text{IKV} = Q_3 - Q_1$$

C2.1.3 Kumulatiewe frekwensie:

Vb. 1 (a) Voltooi die volgende frekwensietabel aan die hand van die gemiddelde polsslage (per minuut) van die twee rugbyspanne se spelers, na 'n wedstryd.
Som albei spanne se data op in een frekwensietabel.

Rugbyspan A:	87	98	99	99	102	105	105	107	108	108	111	111
	111	112	116	120	123	123	123	128	130	134	134	
Rugbyspan B:	101	102	108	110	112	113	114	118	119	121	124	124
		126	126	128	129	129	130	131	133	135	135	141

Frekwensie van die rugbyspelers se polsslage:

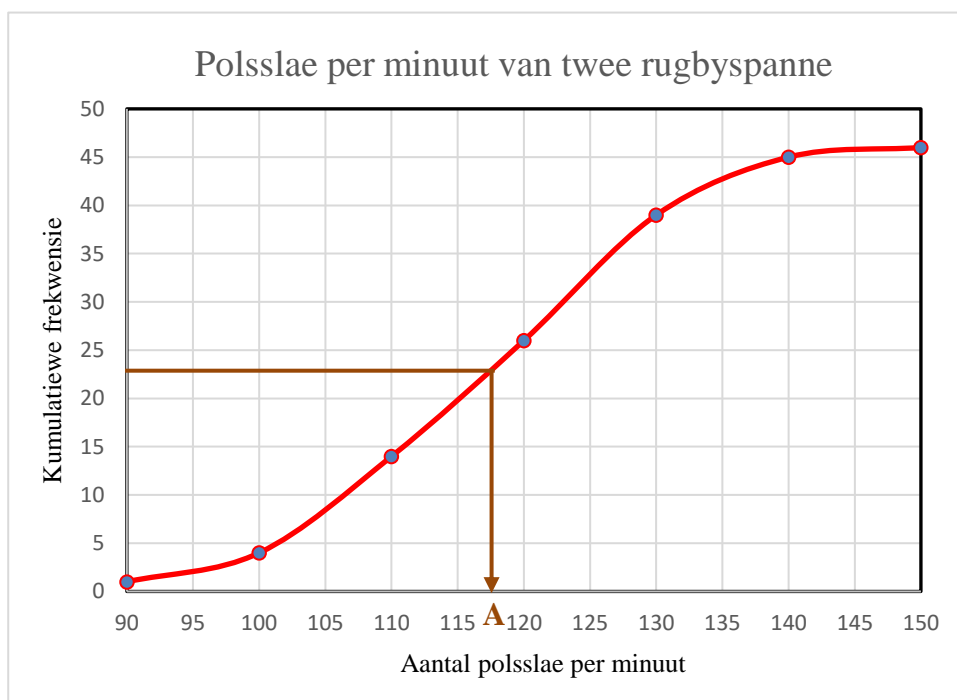
Polsslage	Frekwensie	Kumulatiewe frekwensie	
81 - 90	1	1	Begin deur F(1) te skryf
91 - 100	3	4	Tel F(3) by die 1
101 - 110	10	14 *	Tel F(10) by die 4
111 - 120	11	26	Tel F(10) by die 14
121 - 130	14	39	Tel F(13) by die 24
131 - 140	6	45	Tel F(6) by die 37
141 - 150	1	46	Tel F(1) by die 43

(b) Hoeveel van die spelers se polsslage is minder as 111 slae per minuut?
Gebruik die data in (a).

14 afgelees by *

C2.1.4 Ogiewe:

Vb. 2 (a) Gebruik die kumulatiewe frekwensietabel in vb. 1 en teken 'n ogief van die data.
(b) Gebruik die ogief om die mediaan te bepaal. Dui op die ogief aan waar aflesing gemaak is.



Om die ogief te teken:

- * Op die x -as word die boonste grense van elke klasinterval aangedui.
- * Die y -as word ingedeel in eenhede om die kumulatiewe frekwensie te dek.
- * Elke punt wat op die grafiek aangedui word bestaan dus uit die boonste grens van die klasinterval as x -koördinaat en die kumulatiewe frekwensie as y -koördinaat.
Bv. (90 ; 1) en (100 ; 4).
- * Verbind die punte met die vry hand.
- * Onthou om die asse te benoem!

(b) Daar is 46 data inskrywings. Die mediaan sal dus tussen inskrywings 23 en 24 wees.
Gaan dus op die y -as na kumulatiewe inskrywing 23,5 en lees van daar af die mediaan vanaf die x -as af.

∴ Mediaan = 117 by A

C2.1.5 Variansie en standaardafwyking:

C2.1.5.1 Sonder sakrekenaar:

Vb.3 Die aantal motors (per maand) wat 'n sekere motorhandelaar se verkoopskonsultante in een kalenderjaar verkoop het is as volg:

23 32 11 34 16 14 27 12 17 18 29 19

(a) Bepaal die gemiddelde aantal motors per maand wat deur die verkoopskonsultante verkoop is vir die betrokke jaar.

$$\bar{x} = \frac{11 + 12 + 14 + 16 + 17 + 18 + 19 + 23 + 27 + 29 + 32 + 34}{12} = \frac{252}{12} = 21$$

(b) Voltooi die onderstaande tabel:

Aantal motors verkoop (x)	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
11	$11 - 21 = -10$	100
12	$12 - 21 = -9$	81
14	$14 - 21 = -7$	49
16	$16 - 21 = -5$	25
17	$17 - 21 = -4$	16
18	$18 - 21 = -3$	9
19	$19 - 21 = -2$	4
23	$23 - 21 = 2$	4
27	$27 - 21 = 6$	36
29	$29 - 21 = 8$	64
32	$32 - 21 = 11$	121
34	$34 - 21 = 13$	169
	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 =$	678

(c) Bepaal die variansie van die aantal motors verkoop.

$$\text{Variansie} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{12} = \frac{678}{12} = 56,5$$

(d) Bepaal die standaardafwyking van die aantal motors verkoop.

$$\text{Standaardafwyking } (\sigma) = \sqrt{\text{Variansie}} = \sqrt{56,6} \approx 7,52$$

(e) Deur van die standaardafwyking, bereken in (d), gebruik te maak, maak 'n uitspraak aangaande die verkoopstaktiek van die konsultante.

7 van die verkoopskonsultante se verkoopsyfers lê binne die standaardafwyking van 7,52 vanaf die gemiddeld. Hierdie konsultante het dus verkoopsyfers naby die gemiddeld gehad. Die span verkoopskonsultante se verkope was dus baie konstant.

C2.1.5.2 Met sakrekenaar:

Stappe met gebruik van die CASIO fx-82 ZA Plus II wetenskaplike sakrekenaar:

* Druk Mode 2(STAT)	
* Druk 1(VAR)	
* Skerm: x	
1	
2	
3	→ Sleutel data in gevolge deur =
* Druk AC om skerm skoon te maak	
* Druk Shift 1 – STAT opsies verskyn op die skerm	
* Druk 4(VAR) – VAR opsies verskyn op die skerm	
* Druk 2(\bar{x}) = vir die Rekenkundige gemiddeld (RG)	26
* Druk Shift 1 – STAT opsies verskyn op die skerm	
* Druk 4(VAR) – VAR opsies verskyn op die skerm	
* Druk 3(σx) = vir die Standaard afwyking	4,06201 ... \approx 4,06

Voorbeeld:

21 ; 24 ; 27 ; 32

21 = 24 = 27 = 32 =

26

4,06201 ... \approx 4,06

Gebruik nou die data in voorbeeld 3 om die standaardafwyking(σ) met die SR te bereken.

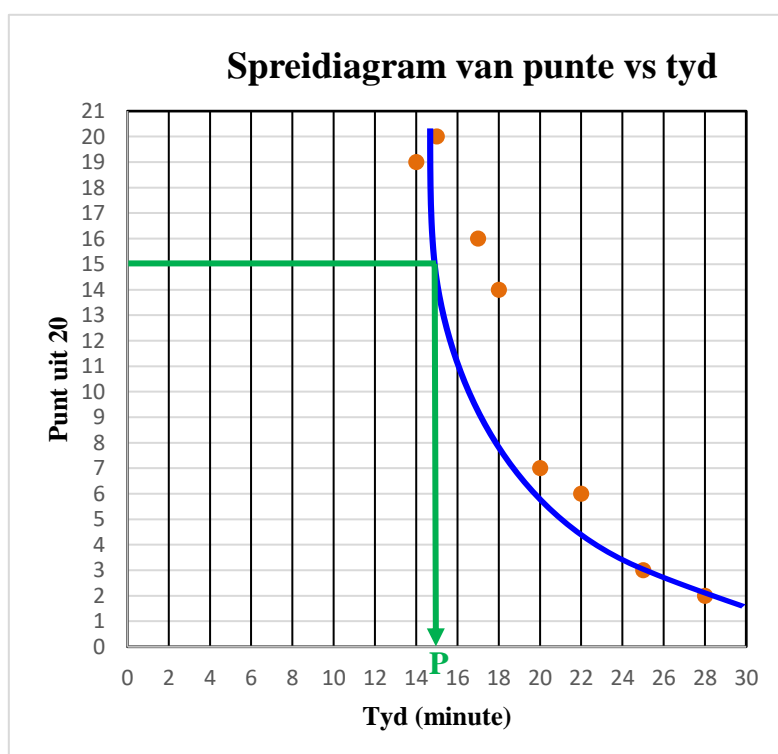
C2.1.6 Spreidiagramme:

Vb. 4 'n Groep studente skryf 'n toets aan die einde van 'n afdeling. Die toets bestaan uit 20 meervoudige keusevrae. Dit blyk dat die studente wat hard geleer het, die toets vinniger beantwoord. Die onderstaande tabel toon die tyd en punte vir elke student:

Student:	A	B	C	D	E	F	G	H
Tyd (in minute):	25	20	18	22	15	17	28	14
Punt uit 20:	3	7	14	6	20	16	2	19

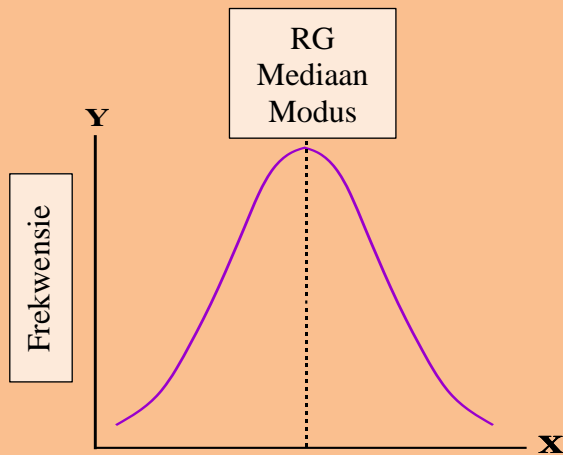
- (a) Teken 'n verspreidingsdiagram (a) om die inligting in bogenoemde tabel voor te stel.
- (b) Teken 'n toepaslike paslyn in.
- (c) Beskryf die korrelasie tussen die punte aan die hand van die paslyn.
- (d) Voorspel hoe lank 'n student met 'n punt van 15 uit 20 sou neem om die toets te voltooi.

- (b) Sien grafiek in blou
- (c) Eksponensiesiale korrelasie
- (d) By P: dit kan om en by 15 minute neem om 'n punt van 15 uit 20 te behaal.



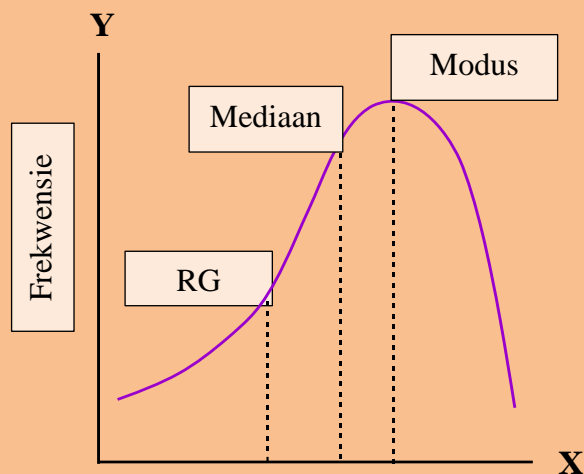
C2.1.7 Ontleding van verspreiding:

Simmetriese verspreiding:



$$\rightarrow \text{RG} - \text{Mediaan} = 0$$

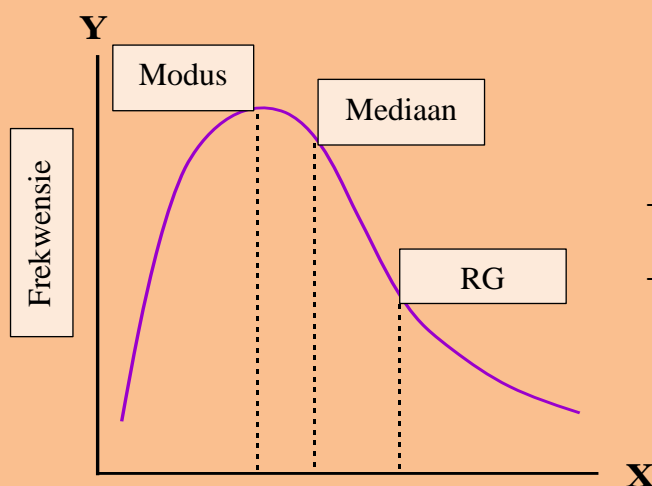
Verspreiding negatief skeef:



$$\rightarrow \text{RG} - \text{Mediaan} < 0$$

\rightarrow Negatief skeef na links

Verspreiding positief skeef:

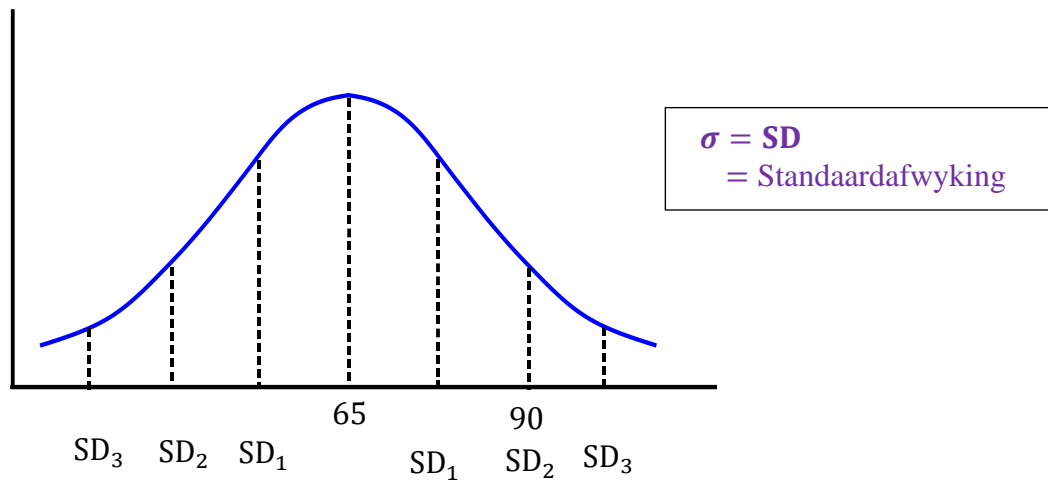


$$\rightarrow \text{RG} - \text{Mediaan} > 0$$

\rightarrow Positief skeef na regs

Vb. 5

Twee universiteite het Wiskunde-toelatingseksamens vir voornemende eerstejaarstudente. Renata het die toelatingseksamens by albei universiteite afgelê. Die normale verspreidings grafiek hieronder stel die uitslae van Universiteit A voor.



* Universiteit B het die volgende bekend gemaak:

Gemiddelde (\bar{x}) = 49

Standaardafwyking (σ) = 5

(a) Bereken die standaardafwyking vir Universiteit A se toelatingseksamenuitslae.

$$\sigma = \frac{90 - 65}{2} = 12,5$$

(b) Renata se uitslae was soos volg:

Universiteit A: 78

Universiteit B: 60

In watter toelatingseksamen het sy beter presteer in vergelyking met die ander studente wat ook die toets geskryf het? Motiveer jou antwoord met relevante berekeninge.

Universiteit A: $78 - 65 = 13$ - Sien grafiek!

Haar uitslae lê bietjie meer as een standaardafwyking van die gemiddeld af.

Universiteit B: Sien by *!

$$\bar{x} + \sigma = 49 + 5 = 54$$

$$\bar{x} + 2\sigma = 49 + 10 = 59$$

Haar uitslae lê bietjie meer as twee standaardafwykings van die gemiddeld af.

∴ Haar prestasie was beter by Universiteit B in vergelyking met die ander student.

Oefening 1:

Datum: _____

(1) Bereken die RG (\bar{x}) en die standaardafwyking (σ) van elk van die volgende stelle data deur gebruik te maak van 'n sakrekenaar: [Gee jou antwoord korrek tot een desimaal.]

(a) 18 ; 24 ; 36 ; 11 ; 24

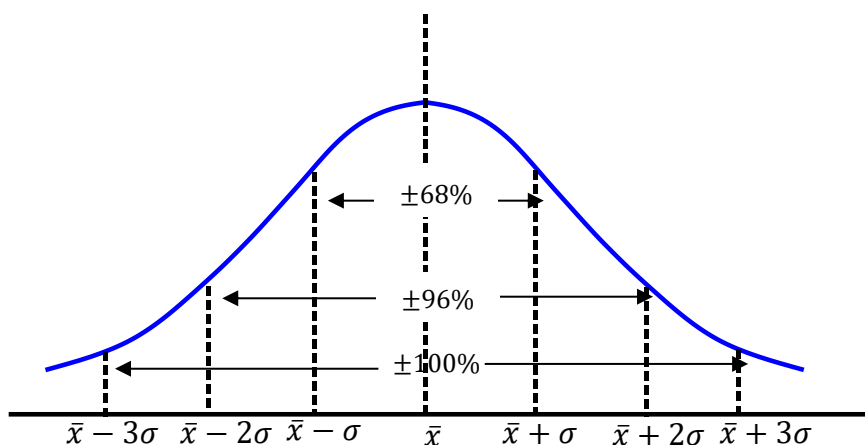
(b) 312 ; 203 ; 254 ; 215 ; 456 ; 300

(c) 3 ; 2 ; 8 ; 10 ; 4 ; 3 ; 3 ; 4 ; 5 ; 3

(d) 3 380 ; 3 456 ; 3 654 ; 3 020

(e) 44 ; 32 ; 56 ; 37 ; 65 ; 33 ; 40

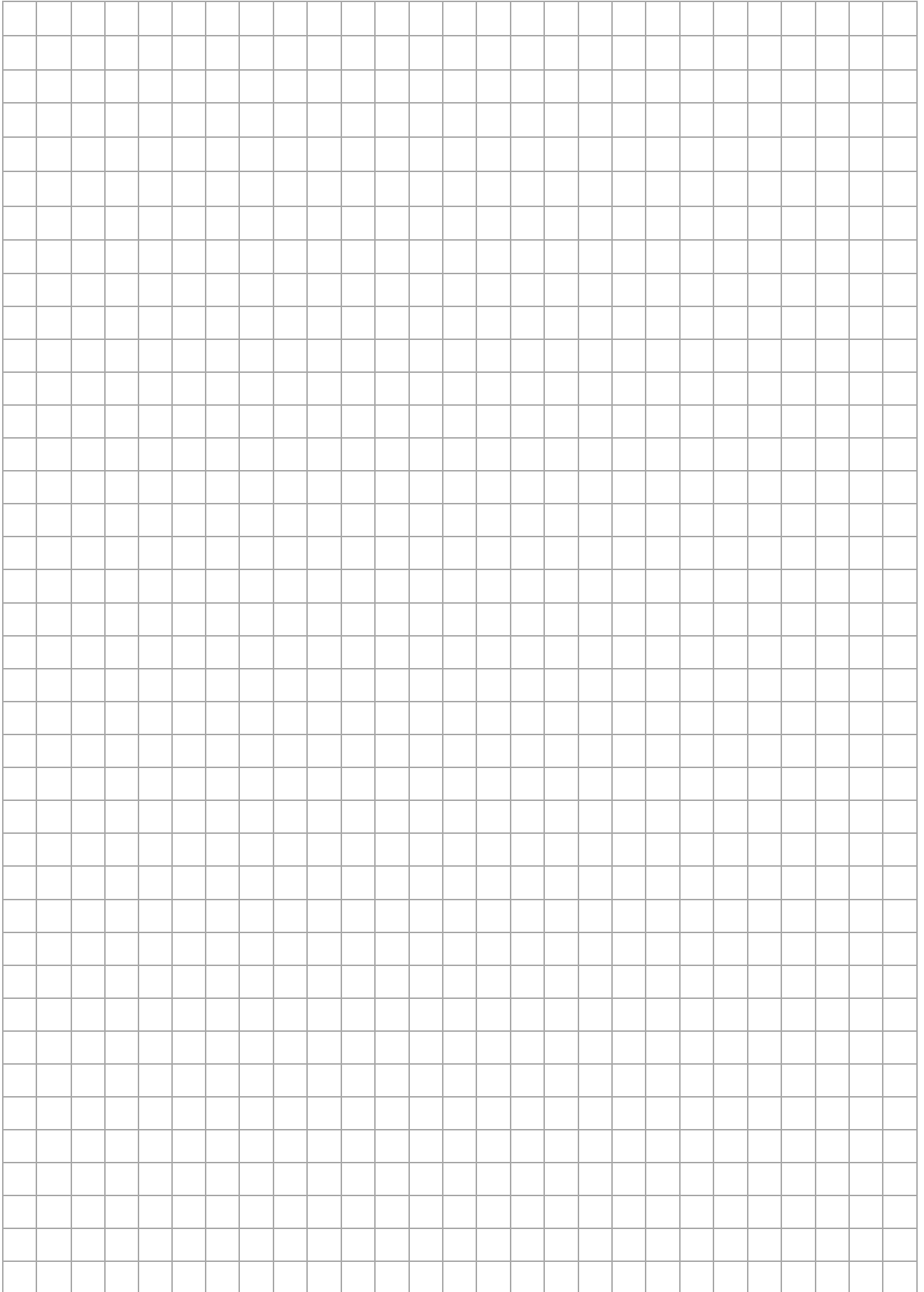
(2) Die getal SMS-boodskappe wat deur 'n groep tieners gestuur is, is oor 'n tydperk van 'n week aangeteken. Daar is gevind dat die data normaal versprei is met 'n gemiddeld van 140 boodskappe en 'n standaardafwyking van 12 boodskappe. MRt 2012 Vr 3 Vraag 3



Beantwoord die volgende vrae met verwysing na die inligting verskaf in die grafiek:

(a) Watter persentasie tieners het minder as 128 boodskappe gestuur?

(b) Watter persentasie tieners het tussen 116 en 152 boodskappe gestuur?



- (4) 'n Boer maak gebruik van stukwerkers om groente te pluk. Hy poog om daaglik groente op twee hektare te oes. Die onderstaande tabel toon die aantal werkers teenoor die totale aantal ure wat die werkers per dag geneem het om die twee hektaar groente te oes:

Dag	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Aantal ure	4	12	8	6	9	10	12	4	5
Aantal werkers	36	13	16	24	15	14	36	40	28

- (a) Bepaal die mediaan vir die aantal ure gewerk.

- (b) Bepaal die mediaan vir die aantal werkers.

- (c) Stel die data in die tabel voor as 'n spreidiagram. Toon op die grafiek die mediaanpunt duidelik aan. Merk die mediaanpunt met 'n M.

- (d) Sal die beste paslyn beste beskryf word as 'n lineêre, kwadratiese of eksponensiële kurwe vir bogenoemde inligting?

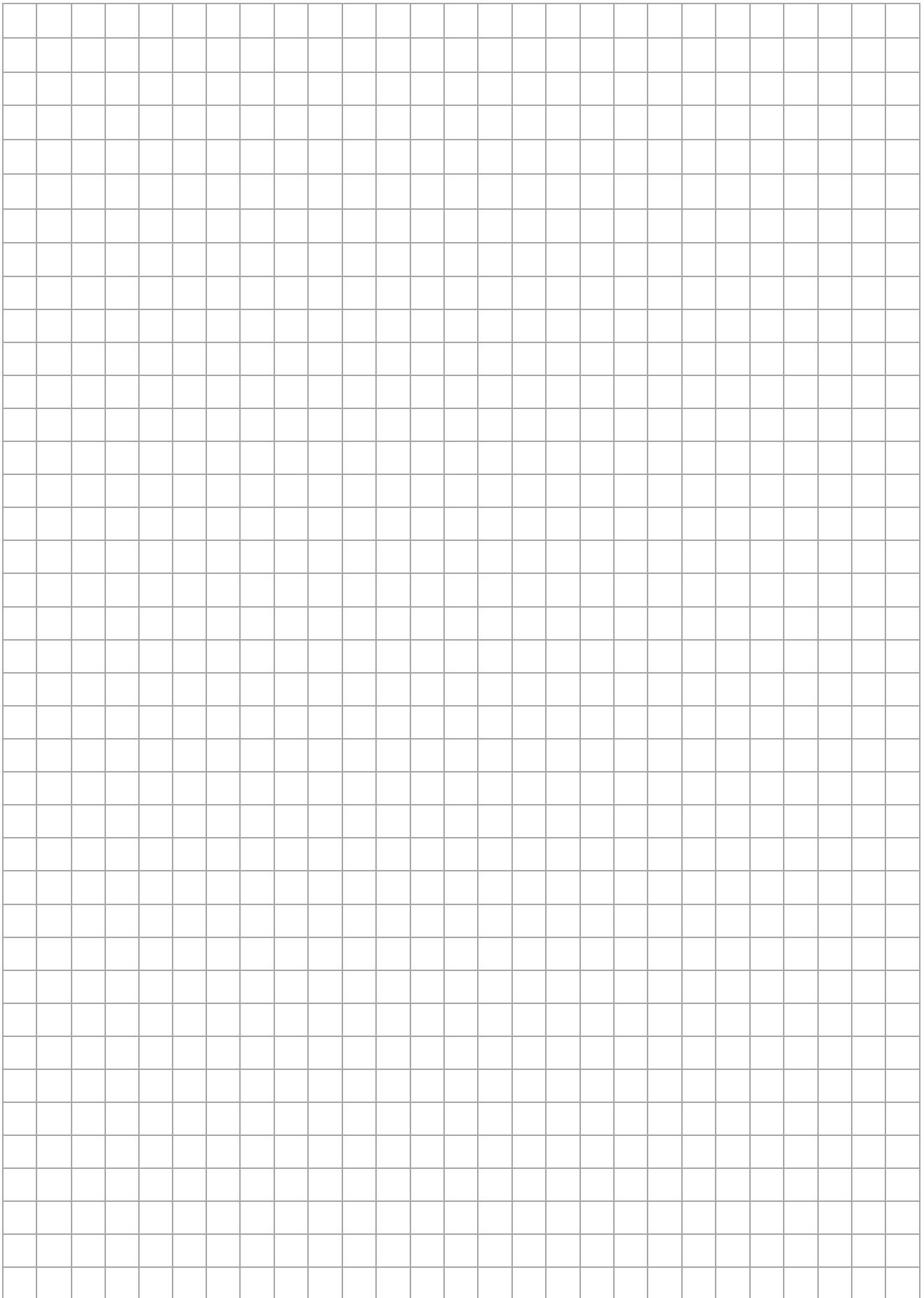
- (e) Bereken die gemiddelde aantal ure deur die werkers per dag gewerk vir die betrokke tydperk.

- (f) Gebruik 'n sakrekenaar en bereken die variansie en standaardafwyking van die aantal ure deur die werkers gewerk per dag.

- (5) Die volgende tabel toon die aantal motors, volgens fabrikaat wat deur 'n tweedehandse motorhandelaar te koop aangebied word:

Fabriek:	Aantal sedans:	Aantal bakkies:	Frekwensie:
Fiat	12	4	
Ford	8		15
Mazda		10	18
Nissan	5	7	
Opel	16	2	
Tata	18		26
Toyota		3	6
Volkswagen	7	2	
TOTAAL			

- (a) Voltooi die tabel.
- (b) Is hierdie data diskreet of kontinu? Motiveer jou antwoord.
- (c) Stel die tabel (totaal) voor as 'n sirkeldiagram. Toon alle bewerkings.



(d) Stel die aantal sedans beskikbaar in die verskillende fabrikate, voor as 'n staafdiagram.

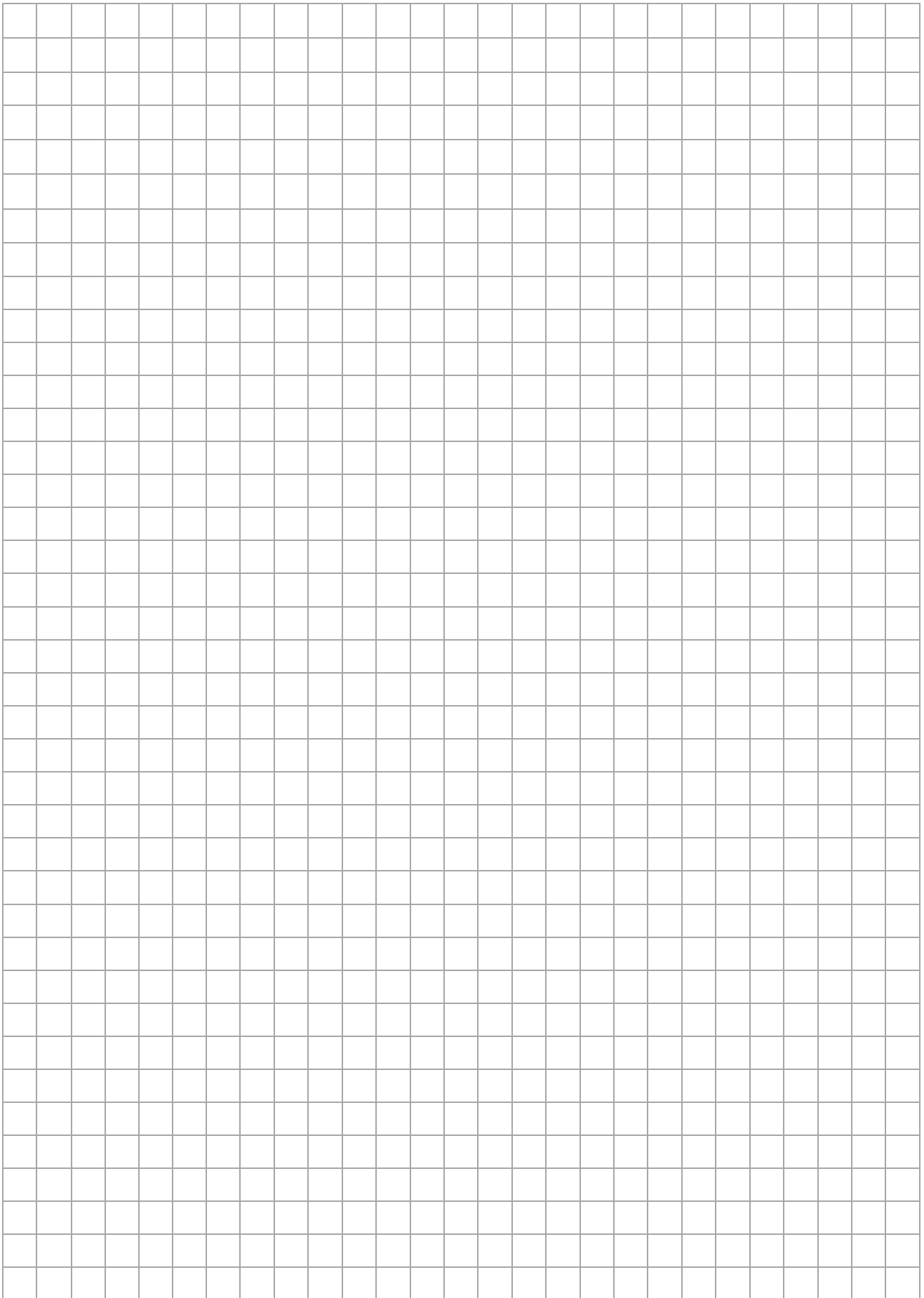
(e) Stel die aantal bakkies beskikbaar in die verskillende fabrikate, voor as 'n lyndiagram.

(6) Die volgende is die lengtes, tot die naaste cm, van alle dogters in graad 8:

141 145 176 165 156 137 169 176 155 187 156 153 161 163 156 155 161
150 159 177 148 155 160 145 168 149 167 169 157 171 166 156 161 169
170 169 163 172 188 139 169 167 155 153 149 166 178 155 168 181 177

(a) Is hierdie data diskreet of kontinu? Motiveer jou antwoord.

(b) Is hierdie data kwantitatief of kwalitatief? Motiveer jou antwoord.



- (c) Gebruik die data en voltooi die onderstaande tabel en teken 'n ogief van die data in die tabel:

Lengtes in cm:	Telling:	Frekwensie (F):	Kumulatiewe F:	Punte om te stip:
131 – 140				
141 – 150				
151 – 160				
161 – 170				
171 – 180				
181 – 190				

- (d) Toon op die ogief aan waar jy die mediaan sal aflees. Wat is die mediaan?

- (e) Bepaal die modale klas. _____

- (f) Stel die data voor as 'n stingel-en-blaardiagram.

- (g) Gebruik die stingel-en-blaardiagram in (f) en bepaal die modus. Vergelyk die modus met die modale klas soos in (e) bereken.

- (h) Gebruik die stingel-en-blaardiagram in (f) en bepaal die mediaan. Vergelyk hierdie mediaan met die mediaan soos in (d) bereken.

C2.2 Regressie-lyn:

Om die verhouding tussen twee veranderlikes te ondersoek maak ons gebruik van 'n spreidiagram. Die onafhanklike veranderlike (word nie deur ander veranderlike beïnvloed nie), word op die x -as aangetoon. Die afhanklike veranderlike (dit is hierdie veranderlike se uitkoms wat ondersoek word), word op die y -as aangetoon. Die beste paslyn (soos in vorige grade bestudeer) staan ook bekend as die lineêre regressie-lyn. Indien die punte almal in 'n perfekte reguitlyn lê, word die lyn gedefinieer deur $y = bx + a$. Indien die punte meer verspreid is, maar die algemene neiging is 'n reguitlyn, word die lyn 'n regressie-lyn genoem met vergelyking $\hat{y} = a + bx$. Om die vergelyking van die regressie-lyn akkuraat te bereken (dus nie deur inspeksie nie), maak ons gebruik van die kleinstekwadrate-metode.

C2.2.1 Regressie-lyn – sonder 'n sakrekenaar:

Om die vergelyking van die regressie-lyn ($\hat{y} = a + bx$) te bereken sonder 'n sakrekenaar gaan ons as volg te werk:

- * Bereken die RG van al die x -waardes (\bar{x}) asook die RG van al die y -waardes (\bar{y}).
- * Stel 'n tabel op soos in voorbeeld 6 hieronder en voltooi die tabel.
- * Bereken die som van $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ en ook die som van $(x - \bar{x})^2$.
- * Vervang die waardes van $\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ en $\sum(x - \bar{x})^2$ in die gradiënt formule om b te bereken.
- * Gebruik die vergelyking, $\hat{y} = a + bx$ om die waarde van a te bereken.
- * Skryf die vergelyking in standaardvorm.

Vb. 6 Bepaal die vergelyking van die regressie-lyn van die volgende stel data:

x	23	28	29	36	37	45
y	56	73	81	103	111	119

x	y	$(x - \bar{x})$	$(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$
23	56	-10	-34,5	345	100
28	73	-5	-17,5	87,5	25
29	81	-4	-9,5	38	16
36	103	3	12,5	37,5	9
37	111	4	20,5	82	16
45	119	12	28,5	342	144
$\sum x = 198$	$\sum y = 543$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum = 932$	$\sum = 310$
$\bar{x} = 33$	$\bar{y} = 90,5$				

$$\therefore b = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2} = \frac{932}{310} = 3,00645 \dots \approx 3 \text{ korrek tot twee desimale}$$

Met $\hat{y} = a + bx$

$$\therefore 90,5 = a + 3 \times 33 \rightarrow \text{Vervang } \bar{x} = 33; \bar{y} = 90,5 \text{ en } b = 3,00645 \dots \text{ in.}$$

$$\therefore 90,5 = a + 3,00645 \dots \times 33$$

$$\therefore a = -8,712 \dots \approx -8,71$$

$$\therefore \hat{y} = -8,71 + 3x$$

C2.2.2 Regressie-lyn – met 'n sakrekenaar:

Om die vergelyking van die regressie-lyn ($\hat{y} = a + bx$) te bereken met die gebruik van 'n sakrekenaar (CASIO fx-82 ZA PLUS II) gaan ons as volg te werk:

- * Druk Mode → 2: STAT
- * Druk 2: A + BX
- * Sleutel die x -waardes in en druk na elke x -waarde 'n =.
- * Beweeg die merker na regs en dan na bo en sleutel die y -waardes. Onthou die =.
- * Druk AC om die skerm skoon te maak.
- * Druk Shift 1 en dan 5:Reg
- * Druk 1:A = om a te bepaal.
- * Druk AC Shift 1 dan 5 en dan 2:B = om b te bepaal.
- * Skryf die vergelyking in standaardvorm.

Toets voorbeeld 6 met jou sakrekenaar!

C2.2.3 Korrelasiekoëffisiënt – met 'n sakrekenaar:

Die korrelasiekoëffisiënt (r) toon die sterkte van die lineêre verband aan tussen die twee veranderlikes wat op 'n spreigrafiek voorgestel is. Die korrelasiekoëffisiënt kan wissel tussen -1 en 1 . Hoe nader die korrelasiekoëffisiënt aan 1 is, hoe sterker sal die verband tussen die veranderlikes aan perfek positief wees en hoe nader die korrelasiekoëffisiënt aan -1 is, hoe sterker sal die verband tussen die veranderlikes aan perfek negatief wees. Indien die korrelasiekoëffisiënt 0 is, sal daar geen verband tussen die veranderlikes wees nie.

Om die korrelasiekoëffisiënt (r) te bereken met die gebruik van 'n sakrekenaar (CASIO fx-82 ZA PLUS II) gaan ons as volg te werk:
 [Al die stappe soos vir die berekening van die vergelyking van die regressie-lyn.]
 [Gaan dus direk na berekening van die regressie-lyn na die berekening van die korrelasiekoëffisiënt – laaste stap.]

- * Druk Mode → 2: STAT
- * Druk 2: A + BX
- * Sleutel die x -waardes in deur na elke x -waarde 'n = te druk.
- * Beweeg die merker na regs en dan na bo en sleutel die y -waardes. Onthou die =.
- * Druk AC om die skerm skoon te maak.
- * Druk Shift 1 en dan 5:Reg
- * Druk 1:A = om a te bepaal.
- * Druk AC Shift 1 dan 5 en dan 2:B = om b te bepaal.
- * **Druk AC Shift 1 dan 5 en dan 3:r = om r te bepaal.**

Vb. 7 Bepaal die korrelasiekoëffisiënt met behulp van 'n sakrekenaar en interpreteer die sterkte van die korrelasie tussen x en y in voorbeeld 6.

$r \approx 0,97 \rightarrow$ Daar is 'n baie sterk korrelasie tussen x en y in voorbeeld 6.