Graad 11 – Boek D
(CAPS Uitgawe)

INHOUD:

Hierdie boek is opgestel en verwerk deur E.J. Du Toit in 2008.
Hersiene CAPS uitgawe 2012.

Kontak nommer: 086 618 3709 (Faks!)

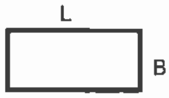
ISBN 978-1-919957-67-8

Hoofstuk D1

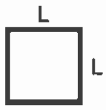
Oppervlakte en Volume

D1.1 Hersiening:

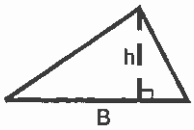
* Reghoek: Omtrek = 2L + 2B
  Oppervlakte = L × B



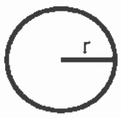
* Vierkant: Omtrek = 4L
  Oppervlakte = L^2



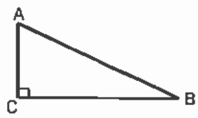
* Driehoek: Omtrek = sy + sy + sy
  Oppervlakte = $\frac{1}{2}$ B × ⊥h



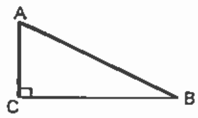
* Sirkel: Omtrek = $2\pi r$
  Oppervlakte = πr^2



* Stelling van Pythagoras: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

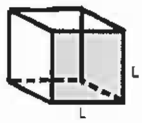


* Trigonometriese funksies: Bv. $\sin \hat{B} = \frac{t}{s} = \frac{AC}{AB}$
  of $\cos \hat{B} = \frac{a}{s} = \frac{BC}{AB}$
  of $\tan \hat{B} = \frac{t}{a} = \frac{AC}{BC}$

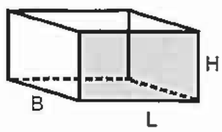


D1.2 Oppervlakarea:

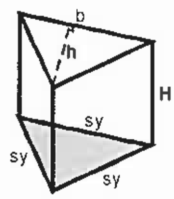
* Regte prisma: Opp. area = Omtrek van basis × ⊥H + 2 × opp van basis
  Bv. Basis vierkant: Opp. area = $(4L)H + 2L^2$ maar L = H
  (Kubus) ∴ Opp. area = $(4L)L + 2L^2$
  ∴ Opp. area = $(4L)L + 2L^2 = 4L^2 + 2L^2$
  ∴ **Opp. area = $6L^2$**



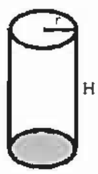
  Bv. Basis reghoek: Opp. area = (2L + 2B)H + 2LB
  ∴ **Opp. area = 2LH + 2BH + 2LB**



  Bv. Basis driehoek: **Opp. area = (sy + sy + sy)H + 2 × $\frac{1}{2}$bh**
  ∴ **Opp. area = (sy + sy + sy)H + bh**

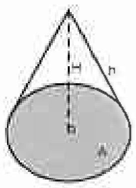


  Bv. Basis sirkel: **Opp. area = $(2\pi r)H + 2(\pi r^2)$**
  (Silinder) **= $2\pi r\,(H + r)$**

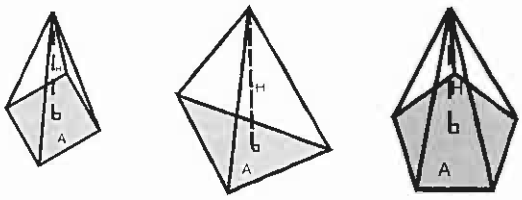


* Regte kegel:

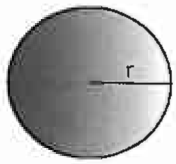
Opp. area = $\pi r(h + r)$ Met: A die opp van die basis– benodig vir die volume!
r die radius van die basis (sirkel)
h die skuinshoogte van die kegel
H die loodregte hoogte – benodig vir die volume!



* Piramide: **Opp. area = A + $\frac{1}{2}$ph Met: A die oppervlakte van die basis**
p die omtrek van die basis
h die skuinshoogte van die piramide
H die loodregte hoogte – benodig vir die volume!



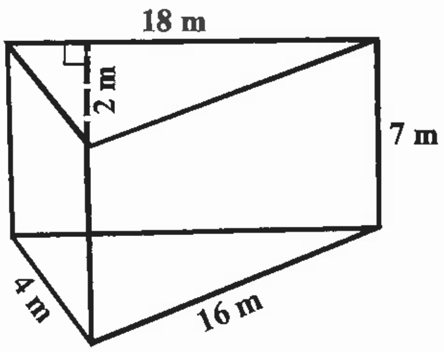
* Sfeer: **Opp. area = $4\pi r^2$ met r die radius.**



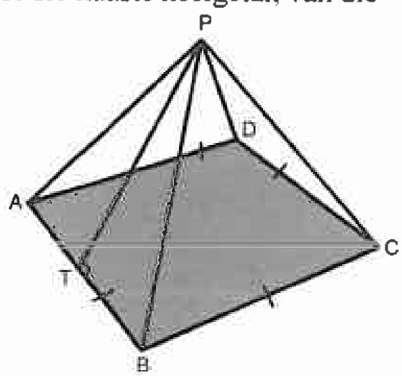
Oefening 1: Datum: ______________

Bereken die totale buiteoppervlakarea, waar nodig afgerond tot die naaste heelgetal, van die volgende:

(1)

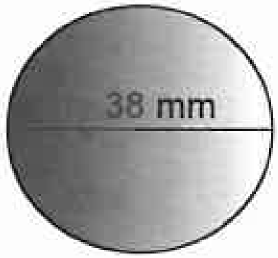


(2)

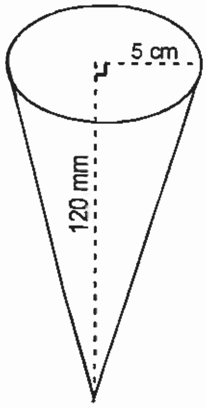


PT = 34 mm en BC = 3,1 cm

(3)



(4)



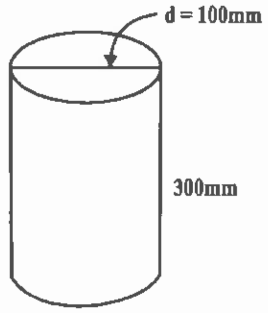
D1.3 Volumes:

* Regte prisma: $V = \text{Basis} \times \text{Hoogte}$
  Bv. Basis vierkant: $V = L^3$
  (Kubus)
  Bv. Basis reghoek: $V = L \times B \times H$
  Bv. Basis driehoek: $V = \frac{1}{2}bh \times H$
  Bv. Basis sirkel: $V = \pi r^2 H$
  (Silinder)
* Regte kegel: $V = \frac{1}{3}AH$
* Piramide: $V = \frac{1}{3}AH$
* Sfeer: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

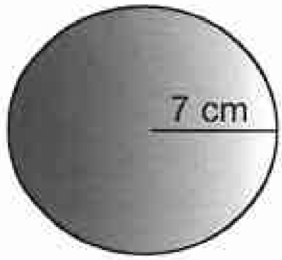
Oefening 2: Datum: ________________

Bereken die volumes van die volgende: [Waar nodig, rond af tot 2 desimale.]

(1)

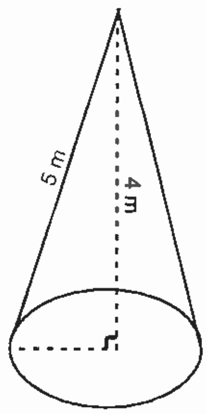


(2)



(3) 'n Soliede blok yster word gesmelt en word dan weer in sferies balletjies gegiet. Die soliede blok is in die vorm van 'n kubus met sylengte 1,2 m. Elke sferiese balletjie moet 'n deursnee van 10 cm hê. Bereken hoeveel van hierdie sferiese balletjies kan uit die gegewe blok yster gegiet word.

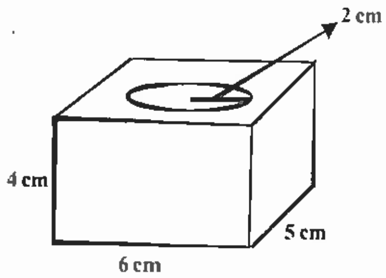
(4)



D1.4 **Kombinasies:**

Oefening 3: Datum: ________________

(1) In die skets is 'n voorstelling van 'n houtblokkie, met 'n silindries gat in die middel, wat deel vorm van 'n stel speelgoed. Die blokkie moet dan met een lagie loodvrye verf geverf word.
Bereken: (Tot 1 des.)
(a) die volume hout waaruit die blokkie bestaan, uitgedruk in mm^3.
(b) Die totale buite-oppervlakte van die blokkie wat geverf moet word.

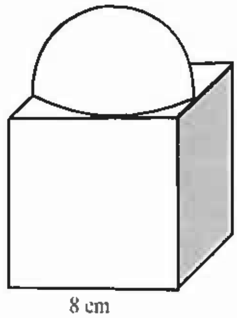


(2) ‘n Halwe sfeer word op ‘n kubus, met sylengtes 8 cm elk, gemonteer.
[Korrek tot die naaste heelgetal.]

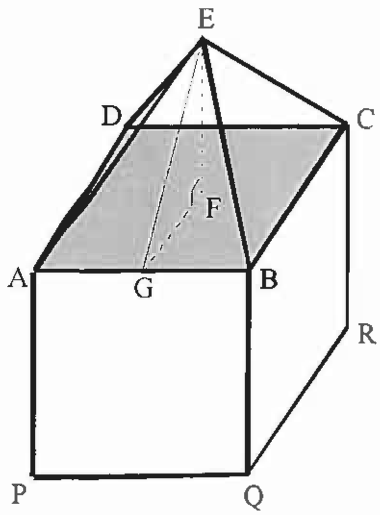
(a) Bepaal die grootste deursnee wat die halwe sfeer moontlik kan hê.

(b) Bereken die buite-oppervlakte van die vaste liggaam.

(c) Bereken die volume van die vaste liggaam.



(3) In die skets is ABCD die gemeenskaplike basis van die piramide en prisma.
ABCD is 'n reghoek met AB = 6 cm en BC = 8 cm. Die hoogte van die prisma is 5 cm.
EF = 4 cm is die loodregte hoogte van die piramide.



Bereken: [Korrek tot 1 des.]

(a) die lengte van FG.

(b) die lengte van die skuinshoogte van die piramide.

(c) die totale buite-oppervlakte van die vaste liggaam.

Hoofstuk D2

Euklidiese Meetkunde

D2.1 Hersiening:

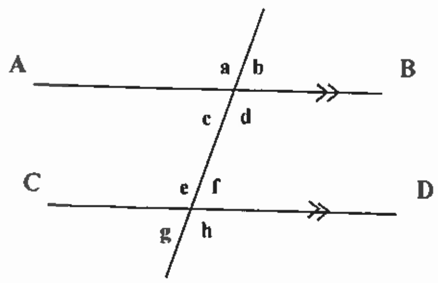
(1) Hoeke:

Tipe hoek:	Voorbeeld:	Hoekgrootte:
Skerphoek		Groter as 0° maar kleiner as 90°.
Regte hoek		Gelyk aan 90°.
Stomphoek		Groter as 90° maar kleiner as 180°.
Gestrekte hoek		Gelyk aan 180°.
Inspringende hoek		Groter as 180° maar kleiner as 360°.
Omwenteling		Gelyk aan 360°.

(2) Ewewydige lyne:

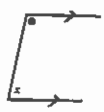
* As twee lyne ewewydig aan mekaar is, sal die volgende geld:

(a) Ooreenkomstige hoeke:
Bv. a = e ; b = f ;
c = g en d = h.



(b) Verwisselende hoeke:
Bv. e = d ; c = f ;
a = h en b = g.

(c) Ko-binne hoeke:
Bv. c + e = 180° en
d + f = 180°.



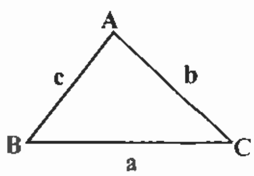
* Om lyne ewewydig te bewys moet een van die volgende geld:

(a) 'n Paar ooreenkomstige hoeke moet gelyk wees
(b) 'n Paar verwissellende hoeke moet gelyk wees of
(c) 'n Paar ko-binne hoeke moet saam 180° wees.

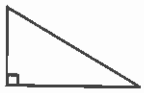
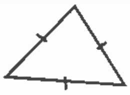
(3) Driehoeke:

* Benoeming van sye en hoeke:

A, B en C stel die hoeke voor.
a, b en c stel die sye voor.



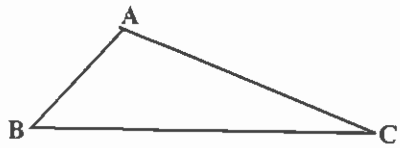
* Tipes driehoeke:

Tipe driehoek:	**Voorbeeld:**	**Beskrywing:**
Reghoekige driehoek		Een hoek is gelyk aan 90°.
Skerphoekige driehoek		Al die hoeke is skerphoeke.
Stomphoekige driehoek		Een van die hoeke is 'n stomphoek.
Gelykbenige driehoek		Twee van die sye is ewe lank.
Gelyksydige driehoek		Al drie die sye is ewe lank.
Ongelyksydige driehoek		Al drie die sye is verskillende lengtes.

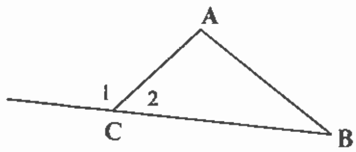
* Eienskappe van driehoeke:

(a) In 'n driehoek is die langste sy altyd teenoor die grootste hoek.
(b) In 'n gelykbenige driehoek is die hoeke teenoor die gelyke sye altyd ewe groot.
(c) In 'n gelyksydige driehoek is al die hoeke gelyk aan 60°.

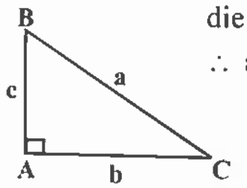
(d) Die som van die binnehoeke van alle driehoeke is 180°.
$\therefore\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$



(e) Die buitehoek van 'n driehoek is gelyk aan die som van die twee teenoorstaande binnehoeke.
$\therefore\ \hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$



* Stelling van Pythagoras:
Volgens Pythagoras: "Die vierkant op die skuinssy van 'n reghoekige driehoek is gelyk aan die som van die vierkante op die reghoeksye."
$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2$



* Gelykvormige driehoeke:

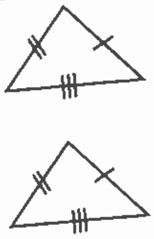
Driehoeke is gelykvormig aan mekaar indien:
(a) al die pare ooreenstemmende hoeke gelyk is en
(b) al die pare ooreenstemmende sye dieselfde verhouding het.

As twee driehoeke gelykvormig is, dan is:
(a) al die ooreenstemmende hoeke gelyk en
(b) al die ooreenstemmende sye is in dieselfde verhouding.

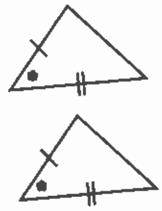
* Kongruente driehoeke:

Twee driehoeke is kongruent aan mekaar indien een van die volgende voorwaardes geld:

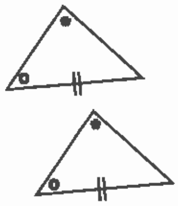
(a) Al drie die pare sye gelyk is.



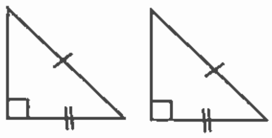
(b) Twee pare ooreenstemmende sye en die ingeslote hoek moet gelyk wees.



(c) Twee pare hoeke en 'n ooreenstemmende sy gelyk is.

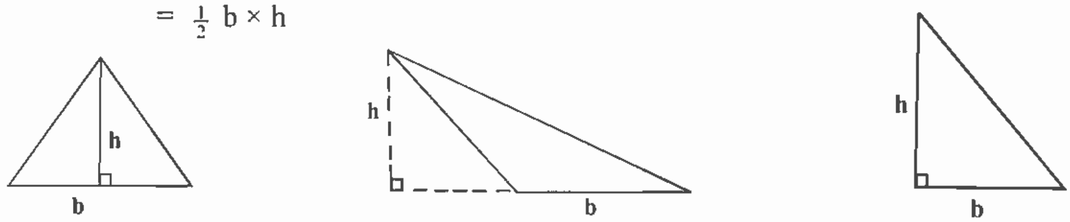


(d) In 'n reghoekige driehoek is die skuinssy en 'n ooreenstemmende reghoeksy gelyk.



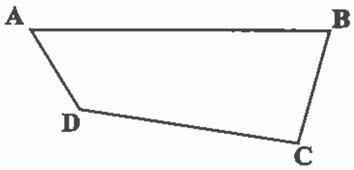
* Die oppervlakte van 'n driehoek:

$$\text{Opp}^{\text{te}}\ \Delta = \tfrac{1}{2}\ \text{basis} \times \text{loodregte hoogte}$$
$$= \tfrac{1}{2}\ b \times h$$

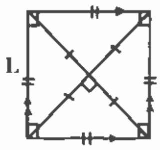
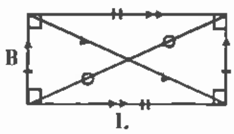


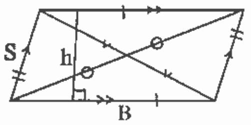
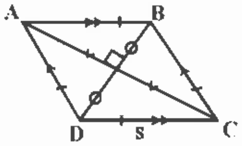
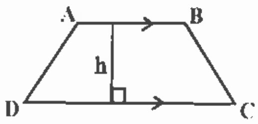
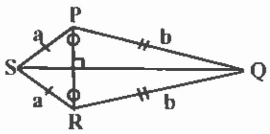
(4) Vierhoeke:

* Die som van die binnehoeke van 'n vierhoek is gelyk aan 360°.
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$



* Tipes vierhoeke:

Tipe vierhoek:	**Eienskappe:**	**Omtrek:**	**Oppervlakte:**
Vierkant 	*Al die sye is ewe lank. *Die teenoorstaande sye is ewewydig. *Al die hoeke is 90°. *Die diagonale (hoeklyne) halveer mekaar reghoekig en halveer die hoeke.	4L	L^2
Reghoek 	*Teenoorstaande sye is ewe lank en ewewydig. *Al die hoeke is 90°. *Hoeklyne halveer mekaar.	2L + 2B	L × B

Parallelogram 	*Teenoorstaande sye is ewe lank en ewewydig. *Die teenoorstaande hoeke is ewe groot. *Hoeklyne halveer mekaar.	$2B + 2S$	$B \times \perp h$
Ruit 	*Al die sye is ewe lank. *Die teenoorstaande sye is ewewydig. *Die teenoorstaande hoeke is ewe groot. *Die diagonale halveer mekaar reghoekig en halveer die hoeke.	$4s$	$\frac{1}{2} AC \times BD$
Trapesium 	*Slegs een paar teenoorstaande sye is ewewydig.	AB+BC+ CD+DA	$\frac{1}{2}h \times$ $(AB + CD)$
Vlieër 	*Die pare aangrensende sye is ewe lank. *Een paar teenoorstaande hoeke is ewe groot. *Die diagonale is loodreg op mekaar en die langste diagonaal halveer die korter diagonaal.	$2a + 2b$	$\frac{1}{2} \times SQ \times PR$

* 'n Vierhoek is 'n parallelogram as:
  - beide pare teenoorstaande sye ewewydig is. (Per definisie!)
  - beide pare teenoorstaande sye ewe lank is.
  - beide pare teenoorstaande hoeke ewe groot is.
  - een paar teenoorstaande sye ewewydig en ewe lank is.
  - die diagonale (hoeklyne) mekaar halveer.

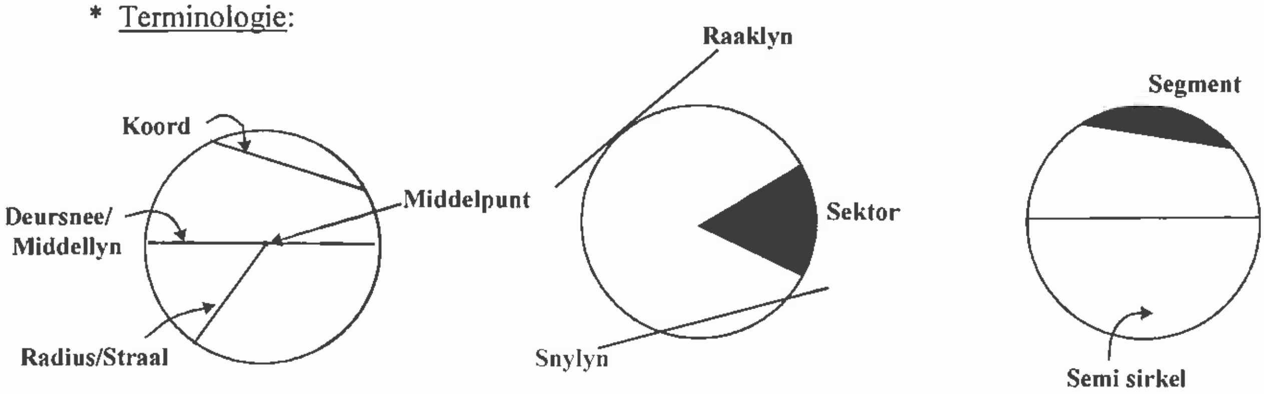
* 'n Ruit is 'n parallelogram waarvan:
  - een paar aangrensende sye ewe lank is.
  - die diagonale loodreg op mekaar is.

* 'n Reghoek is 'n parallelogram waarvan:
  - een van die hoeke 90° is.
  - die diagonale ewe lank is.

* 'n Vierkant is 'n:
  - reghoek waarvan al die sye ewe lank is.
  - ruit waarvan al die hoeke 90° is.

(5) Sirkels:

* Terminologie:



* Oppervlakte en omtrek:

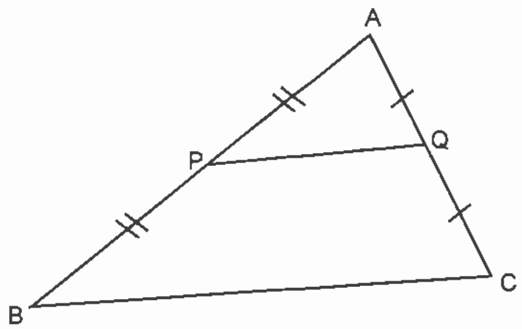
Omtrek $= 2 \times \pi \times r$ en Oppervlakte $= \pi \times r^2$

Onthou: $\pi = \frac{22}{7}$ en Deursnee (d) $= 2 \times$ radius (r)

(6) Middelpuntstelling:

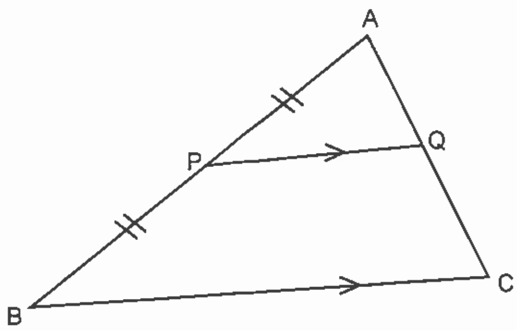
Die lynstuk wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, is ewewydig aan die derde sy en ook gelyk aan die helfte van die lengte van die derde sy.

$\therefore$ As $AP = PB$ en $AQ = QC$,
dan is $PQ \parallel BC$ en
$PQ = \frac{1}{2}BC$.



Omgekeerde: Die lynstuk uit die middelpunt van een sye van 'n driehoek, ewewydig aan 'n tweede sy, halveer die derde sy.

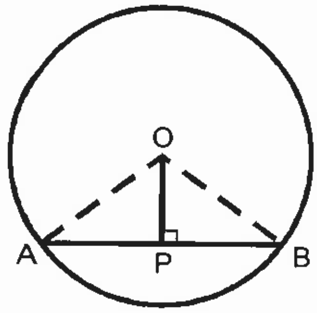
$\therefore$ As $AP = PB$ en $PQ \parallel BC$
dan is $AQ = QC$ en
$PQ = \frac{1}{2}BC$.



D2.2 Middelpunt van 'n sirkel:

Stelling 1:

"Die lyn getrek vanaf die middelpunt van 'n sirkel, loodreg op 'n koord, halveer die koord." [Lyn uit mdpt ⊙ na mdpt koord]



Bewys:
Gegee: 'n Sirkel met middelpunt O met OP ⊥ AB.
Te bewys: AP = PB
Konstruksie: Verbind O met A en O met B.
Bewys: In Δ AOP en Δ BOP:

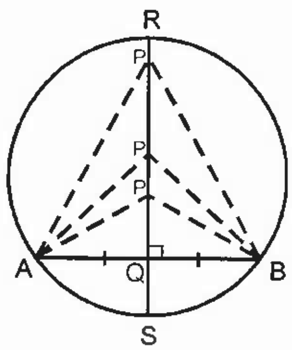
	* AO = BO	[radiusse van sirkel O]
	* $A\hat{P}O = B\hat{P}O$	[OP ⊥ AB]
	* OP = OP	[gemeenskaplik]
∴	Δ AOP ≡ Δ BOP	[Skuinssy en reghoeksy in reghoekige Δ]
∴	AP = PB	[≡]

Omgekeerde van stelling 1:

"Die lyn wat die middelpunt van 'n sirkel verbind met die middelpunt van 'n koord, is loodreg op die koord."

Stelling 2:

"Die middelloodlyn van 'n koord gaan deur die middelpunt van die sirkel." [Middelloodlyn op koord]



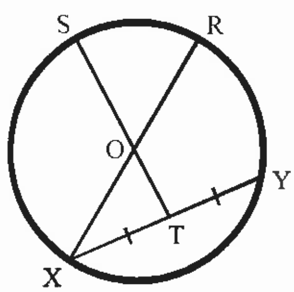
Bewys:
Gegee: 'n Sirkel met AQ = QB en RS ⊥ AB.
Te bewys: Die middelpunt van die sirkel lê op RS.
Konstruksie: Kies P as enige punt op die lyn RS.
Verbind P met A en met B.

Bewys: In Δ AQP en Δ BQP:

	* AQ = BQ	[gegee]
	* $A\hat{Q}P = B\hat{Q}P$	[OD ⊥ AB]
	* QP = QP	[gemeenskaplik]
∴	Δ AOP ≡ Δ BOP	[sy, hoek, sy]
∴	AP = PB	

Maar die middelpunt van 'n sirkel lê ewe ver van enige twee (of meer) punte (soos bv. A en B) op die omtrek van die sirkel. ∴ Die sirkel se middelpunt moet op RS lê.

Vb.1 O is die middelpunt met XT = TY. XR = 20 cm en XY = 16 cm. Bereken die lengte van ST.

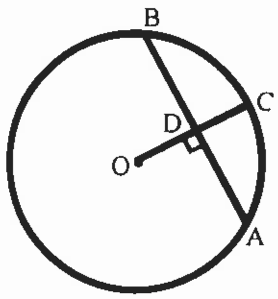


****

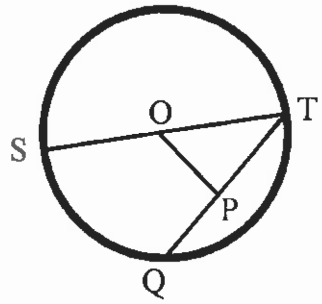
XO = OR = 10 cm [Radius is helfte van middellyn]
XT = TY = 8 cm [Gegee]
OT ⊥ XY [Lyn uit mpt van sirkel na mpt van koord]
∴ In ΔOXT:
$OX^2 = OT^2 + XT^2$ *[Pythagoras]*
$\therefore 10^2 = OT^2 + 8^2$
$\therefore OT^2 = 36$
$\therefore OT = 6$ *cm*
$\therefore ST$ *= Radius (OS) + OT*
= 10 cm + 6 cm
∴ ***ST = 16 cm***

Oefening 1: Datum: ______________

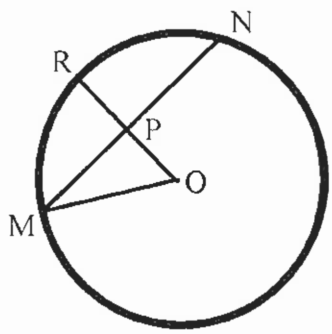
(1) As OD = 5 cm en AB = 24 cm, bereken die lengte van die sirkel se middellyn met middelpunt O.



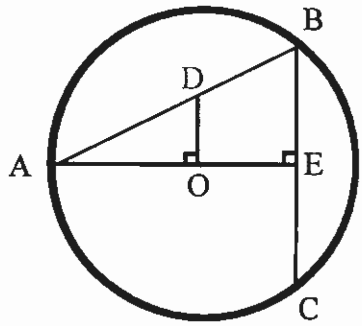
(2) Bereken die lengte van QT indien OS = 10 mm en OP = 6 mm, indien O die middelpunt is van die sirkel en QP = PT.



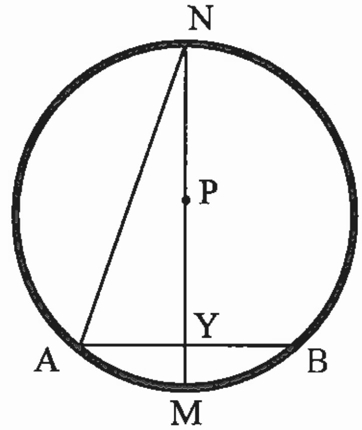
(3) O is die middelpunt van die sirkel met MP = PN. Bereken die lengte van OR, afgerond tot 1 des, as MN = 18 cm en RP = PO = x.



(4) Sirkel O het 'n radius van 15 cm en BC = 24 cm.
Bereken: (a) OE se lengte (b) opp$^{^{\prime}e}$ $\triangle$ABE

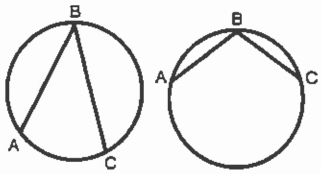


(5) P is die middelpunt van die sirkel met MN = 50 cm.
NM $\perp$ AB en YP = 4YM.
Bereken die lengte van: (Afgerond tot die naaste heelgetal.)
(a) AY (b) AN

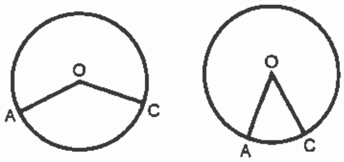


Terminologie:

* $A\hat{B}C$ is telkens 'n omtrekshoek.



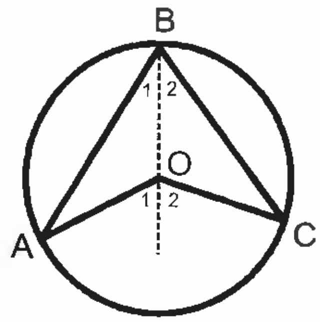
* $A\hat{O}C$ is telkens 'n middelpuntshoek met O die middelpunt van die sirkel.



Stelling 3:

"'n Middelpuntshoek is tweemaal so groot soos die omtrekshoek wat deur dieselfde boog onderspan word en aan dieselfde kant van die middelpunt lê."
[Mdpts $\angle$ = 2 $\times$ omtrks $\angle$]

Bewys:



Gegee: Middelpuntshoek $A\hat{O}C$ en omtrekshoek $A\hat{B}C$ wat deur dieselfde boog, AC onderspan word.
Te bewys: $A\hat{O}C = 2 \times A\hat{B}C$
Konstruksie: Verbind B met O en verleng.

Bewys: In $\triangle$ AOB is:
$\hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B}_1$ [buite $\angle$ van $\triangle$]
Netso in $\triangle$ COB is:
$\hat{O}_2 = \hat{C} + \hat{B}_2$ [buite $\angle$ van $\triangle$]
$\therefore\ \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{C} + \hat{B}_2$
maar $\hat{A} = \hat{B}_1$ en $\hat{C} = \hat{B}_2$ [$\angle^e$ teenoor gelyke sye want radiusse AO = OB = OC]
$\therefore\ \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_2$
$\therefore\ \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2\hat{B}_1 + 2\hat{B}_2$
$\therefore\ \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2(\hat{B}_1 + \hat{B}_2)$
$\therefore\ A\hat{O}C = 2 \times A\hat{B}C$

Die volgende sketse kan ook gebruik word om bogenoemde stelling te bewys: