

Graad 11 – Boek C

(CAPS Uitgawe)

INHOUD:

	<u>Bladsy:</u>
C1. Analitiese Meetkunde	3
C2. Trigonometrie	45

Hierdie boek is opgestel en verwerk deur E.J. Du Toit in 2008.
Hersiene CAPS uitgawe 2012.

Kontak nommer: 086 618 3709 (Faks!)

Kopiereg© 2008. Alle kopiereg word voorbehou. Geen deel van hierdie publikasie mag in enige vorm gereproduseer word nie; tensy skriftelike toestemming daarvoor verkry is.

ISBN 978-1-919957-66-1

Hoofstuk C1

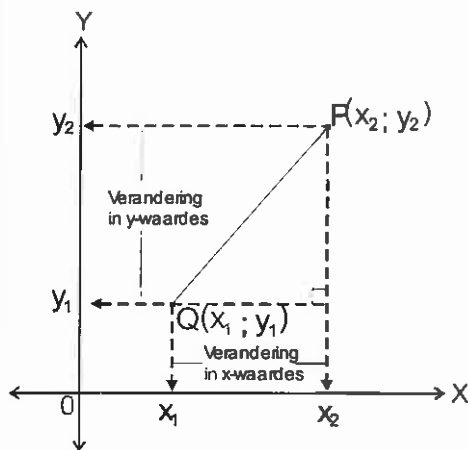
Analitiese meetkunde

C1.1 Gradiënt:

C1.1.1 Berekening van gradiënt:

In graad 10 het ons reeds die formule afgelei vir die gradiënt van 'n reguitlyn.

Afleiding van 'n formule vir die gradiënt van 'n reguitlyn:

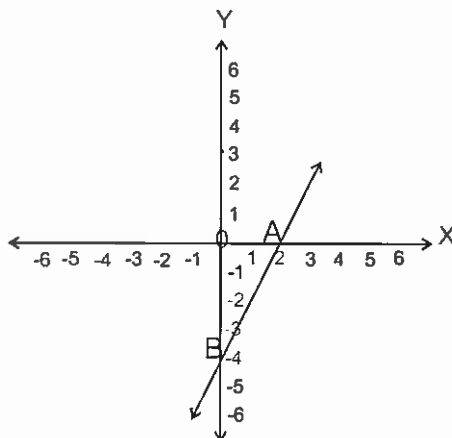


$$\text{Gradiënt/Helling} = \frac{\text{Verandering in } y\text{-waardes}}{\text{Verandering in } x\text{-waardes}}$$

$$m_{PQ} = \frac{\text{Verskil in } y\text{-waardes}}{\text{Verskil in } x\text{-waardes}}$$

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Vb.1



In die skets langsaaan is 'n reguitlyn deur die punte A(2 ; 0) en B(0 ; -4).

Die verskil tussen die y-waardes is dus:

$$-4 - 0 = -4 \text{ en}$$

die verskil tussen die x-waardes is dus:

$$0 - 2 = -2$$

$$\therefore \text{helling} = \frac{\text{verskil tussen } y\text{-waardes}}{\text{verskil tussen } x\text{-waardes}}$$

$$= \frac{-4}{-2}$$

$$m_{AB} = \underline{2}$$

Vb.2 Bereken die gradiënt van die lyn deur die volgende punte: M(2 ; -1) en N(-2 ; 3)

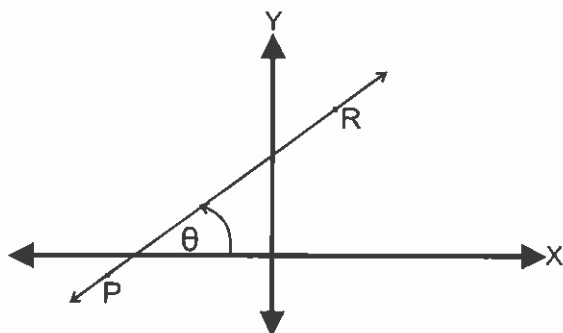
$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \\ M(2 ; -1) & \text{en} & N(-2 ; 3) \end{array}$$

$$m_{MN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-1)}{-2 - (2)} = \frac{3 + 1}{-2 - 2} = \frac{4}{-4}$$

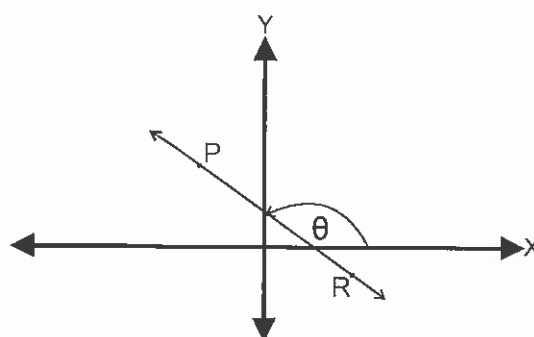
$$\therefore m_{MN} = \underline{-1}$$

C1.1.2 Toepassings van gradiënt:

- * Ewewydige lyne se gradiënte is dieselfde: As $m_1 = m_2 \Leftrightarrow$ die lyne is ewewydig.
- * Die produk van loodregte lyne se gradiënte is gelyk aan -1 :
As $m_1 \times m_2 = -1 \Leftrightarrow$ die lyne is loodreg op mekaar.
- * Drie of meer punte is kollineêr of saamlynig indien die punte op dieselfde reguitlyn lê.
 $\therefore m_{AB} = m_{BC} \Leftrightarrow$ punte A, B en C lê op dieselfde reguitlyn.
- * Die inklinasiehoek van 'n lyn is die hoek tussen die reguitlyn en die positiewe x-as:



Soos hierbo sal die inklinasiehoek, θ 'n skerphoek ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) wees, indien die lyn se gradiënt positief is.



Soos hierbo sal die inklinasiehoek, θ 'n stomphoek ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) wees, indien die lyn se gradiënt negatief is.

Om die inklinasiehoek te bepaal: $\tan \theta = m_{PR}$

Vb.3 Beskou: $P(-3; -2)$, $Q(5; 4)$ en $R(1; -4)$

- Bepaal of die drie punte saamlynig is.
- Bewys dat $QR \perp PR$.
- Bereken die inklinasiehoek (afgerond tot 2 desimale) van lyn PQ.

$$(a) \quad m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{4 - (-2)}{5 - (-3)} = \frac{4 + 2}{5 + 3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$m_{QR} = \frac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q} = \frac{-4 - 4}{1 - 5} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$\therefore P, Q$ en R is nie saamlynig nie, want $m_{PQ} \neq m_{QR}$

(b) In (a) het ons reeds bereken dat $m_{QR} = 2$

$$m_{PR} = \frac{y_R - y_P}{x_R - x_P} = \frac{-4 - (-2)}{1 - (-3)} = \frac{-4 + 2}{1 + 3} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore m_{QR} \times m_{PR} = \frac{2}{1} \times \frac{-1}{2} = -1$$

$\therefore QR \perp PR$

(c) Soos reeds in (a) bereken is $m_{PQ} = \frac{3}{4}$

$$\therefore \tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \theta = \underline{36,87^\circ}$$

Oefening 1:

Datum: _____

(1) Bepaal of die punte A, B en C kollineêr is of nie:

(a) $A(1; 2)$, $B(3; 5)$ en $C(5; 7)$ (b) $A(-1; 3)$, $B(4; 0)$ en $C(14; 6)$

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

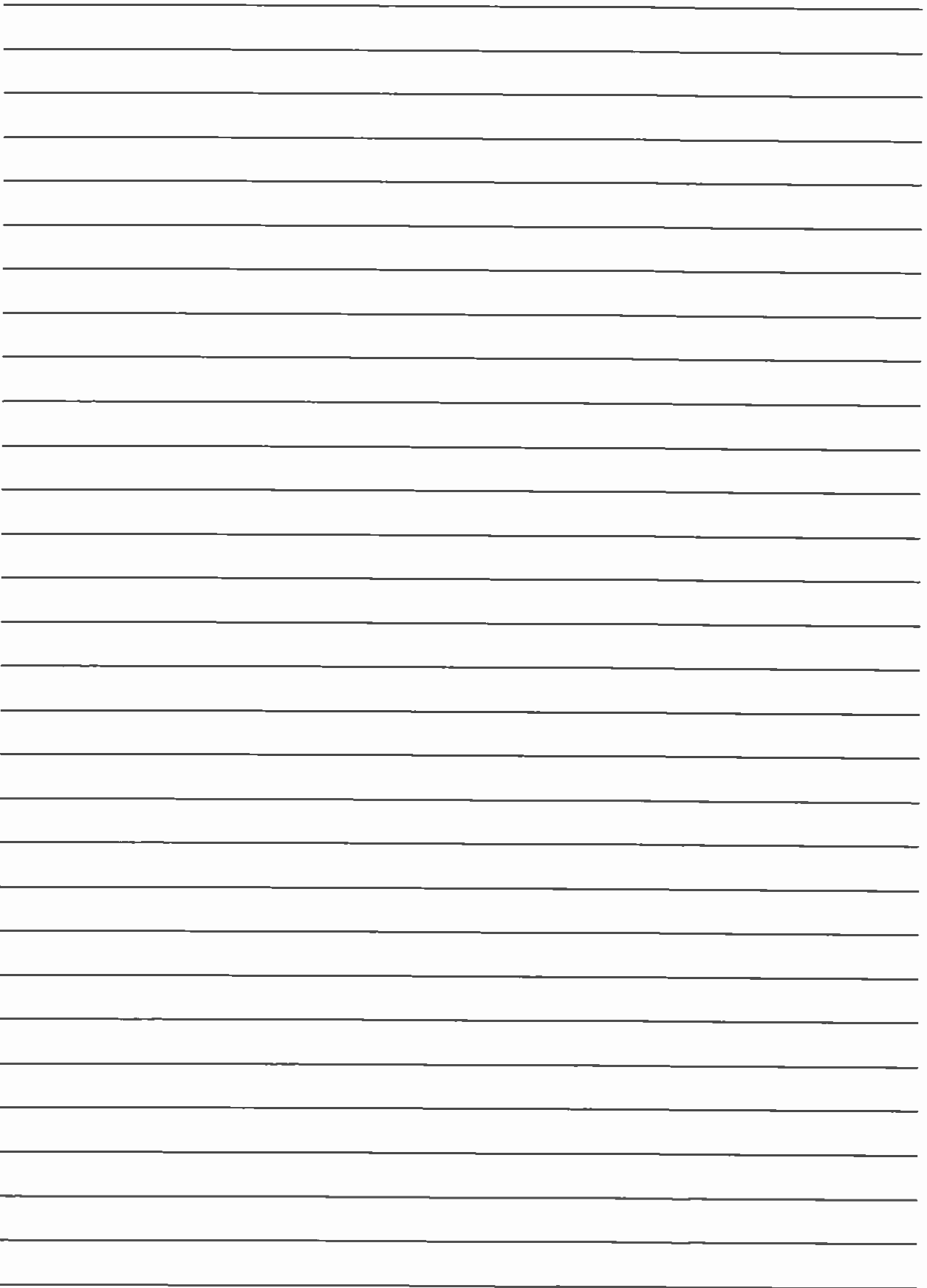
(2) $M(-2; -4)$, $N(1; -3)$, $R(2; -1)$, $T(-3; -1)$ en $K(3; -4)$ (a) Bepaal watter van die volgende lyne is ewewydig en watter lyne is loodreg op mekaar:
MN, TK, RK, NR en TM

(b) Sonder om die inklinasiehoek te bereken, bepaal watter van die lyne in (a) sal 'n inklinasiehoek hê wat 'n skerphoek is.

(c) Bereken die inklinasiehoek van lyn TN.

(3) $D(-3; -1)$, $E(0; -4)$, $F(-1; y)$, $G(x; 3)$ en $H(2; 2)$. Bereken die waarde van:(a) x , as $EG \parallel DH$ (b) y , as $FH \perp DE$

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____



C1.2 Afstand tussen twee punte:

Afleiding van 'n formule vir die afstand tussen enige twee punte:

Die koördinate van C sal $(x_2 ; y_1)$ wees, want A en C het dieselfde x -koördinate en B en C dieselfde y -koördinate.

Die lengte van BC is die verskil tussen die twee x -koördinate van B en C en die lengte van AC is die verskil tussen die y -koördinate van A en C.

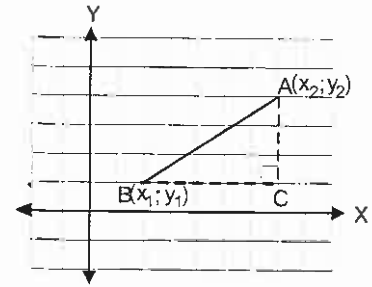
$$\therefore BC = x_2 - x_1 \text{ en } AC = y_2 - y_1 \text{ [Onthou: BC = CB!]}$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 \quad \text{[Pythagoras]}$$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\sqrt{AB^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Vb.4 Bereken die afstand tussen $S(7 ; -5)$ en $T(4 ; -2)$. Indien nodig laat jou antwoord in eenvoudigste wortelvorm.

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \\ S(7 ; -5) & \text{en} & T(4 ; -2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore d(ST) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ d(ST) &= \sqrt{[(4) - (7)]^2 + [(-2) - (-5)]^2} \\ d(ST) &= \sqrt{(4 - 7)^2 + (-2 + 5)^2} \\ d(ST) &= \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} \\ d(ST) &= \sqrt{9 + 9} \\ d(ST) &= \sqrt{18} \\ d(ST) &= \sqrt{9 \times 2} \\ \underline{d(ST)} &= \underline{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Oefening 2:

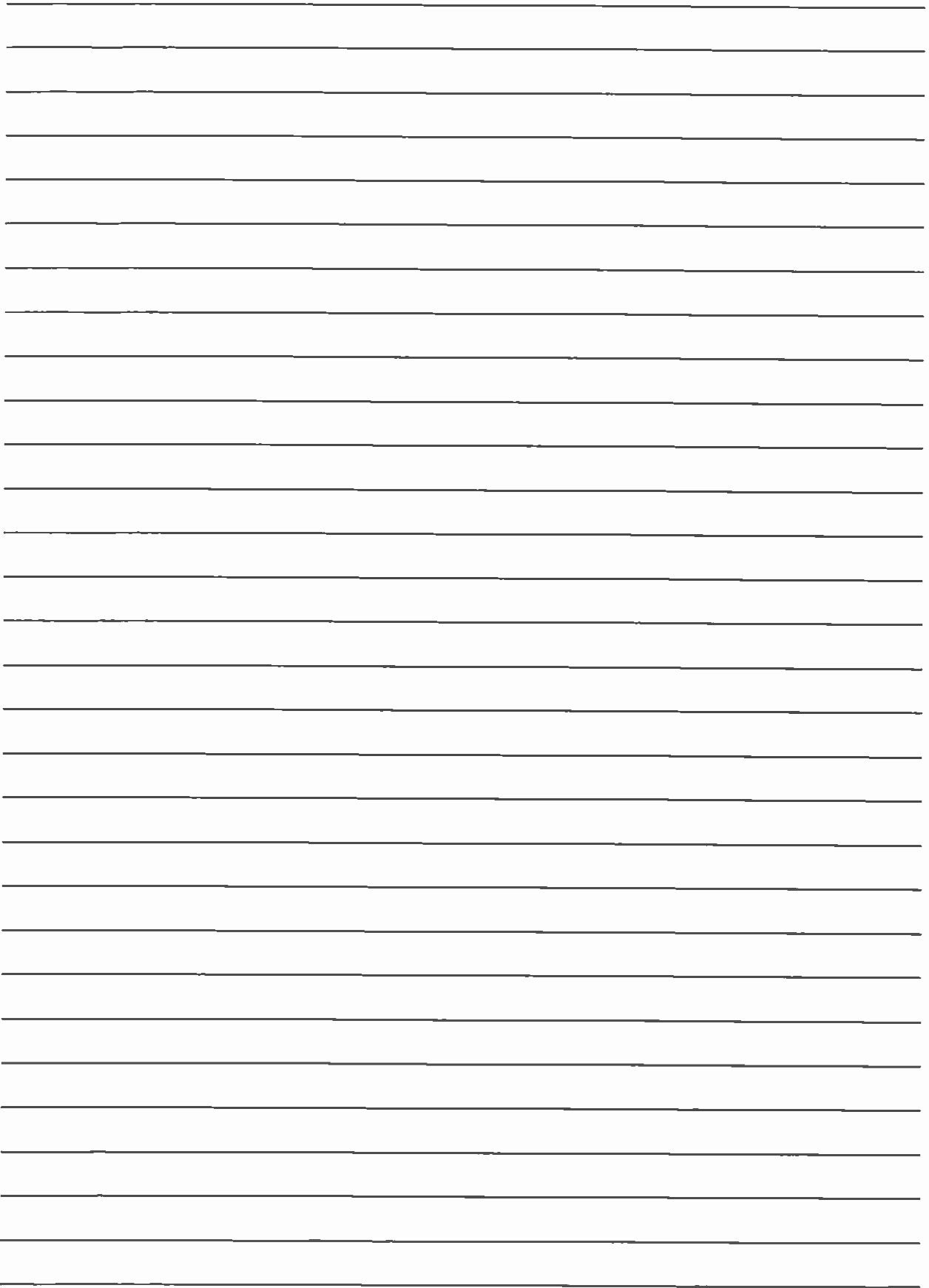
Datum: _____

(1) Bereken die afstand tussen P en Q in elk van die volgende gevalle. Waar nodig, rond af, korrek tot twee desimale:

(a) $P(2 ; 5)$ en $Q(7 ; 4)$

(b) $P(-2 ; -1)$ en $Q(0 ; 5)$

(c) $P(-3 ; 1)$ en $Q(-3 ; 13)$



(d) $P(2,3 ; 3,1)$ en $Q(5,3 ; 1,1)$

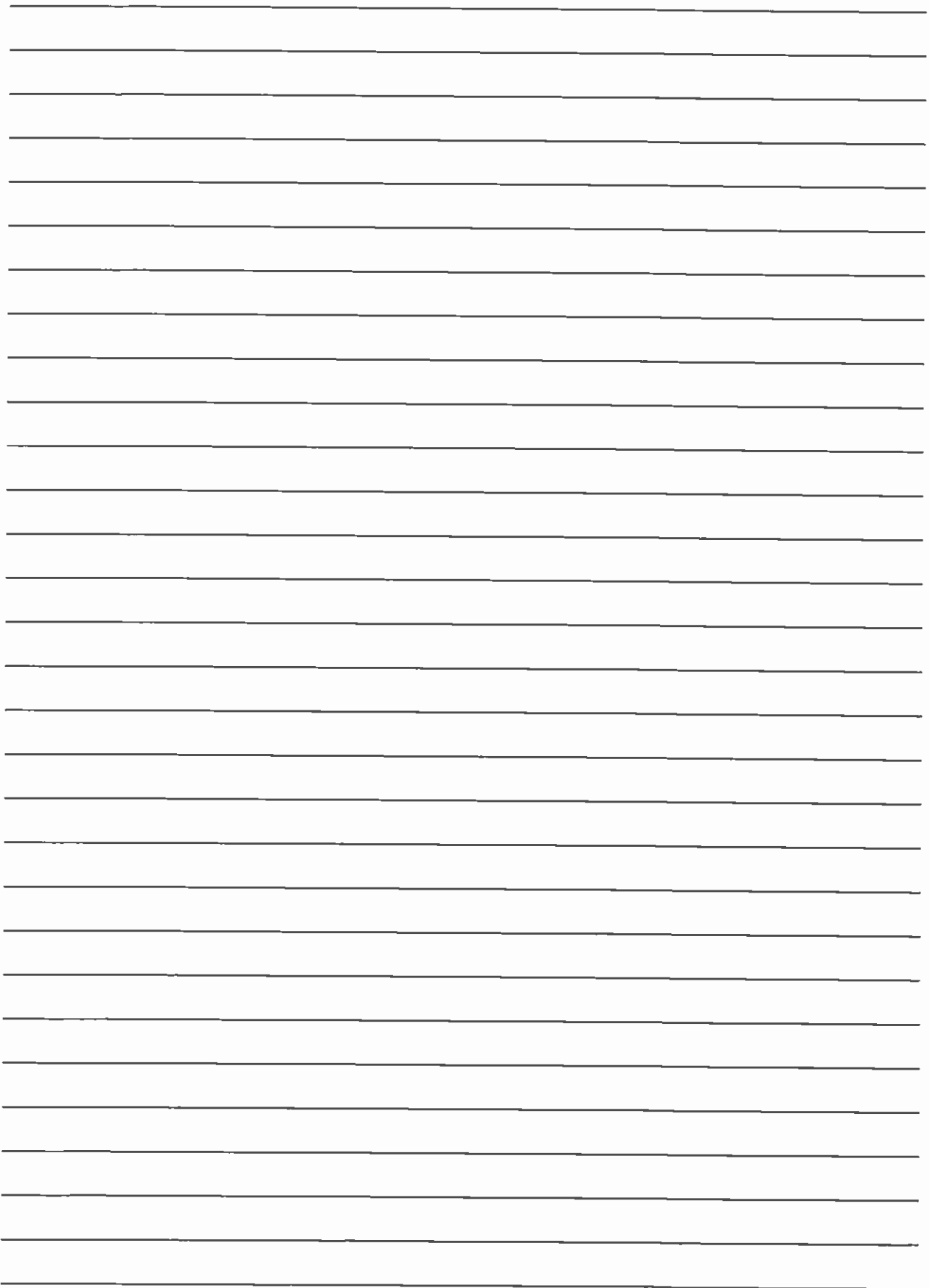
(e) $P(2m ; m)$ en $Q(7m ; -4m)$

(2) Bereken $d(AB)$ in elk van die volgende. Waar nodig, laat die antwoord in eenvoudigste wortelvorm:

(a) $A(1 ; \sqrt{8})$ en $B(-7 ; 0)$ (b) $A(-10 ; 9)$ en $B(-2 ; 15)$ (c) $A(4 ; 1)$ en $B(-4 ; 9)$

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>	<hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>	<hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>
---	---	---

(3) Bereken die waarde(s) van p indien $d(LM) = 5$ met $L(-2 ; p)$ en $M(-5 ; 3)$.



(4) $A(2 ; -2)$, $B(3 ; 4)$ en $C(-3 ; 5)$ is die hoekpunte van driehoek $\triangle ABC$.

(a) Bereken die omtrek van driehoek ABC . Rond die antwoord af tot 1 desimaal.

(b) Toon aan dat $\hat{B} = 90^\circ$.

(5) $P(-2 ; 0)$, $Q(-1 ; -3)$, $R(2 ; 0)$ en $S(1 ; 3)$ is die hoekpunte van 'n parallelogram.

Teken 'n diagram!

(a) Bereken of $PQRS$ 'n ruit is of nie.

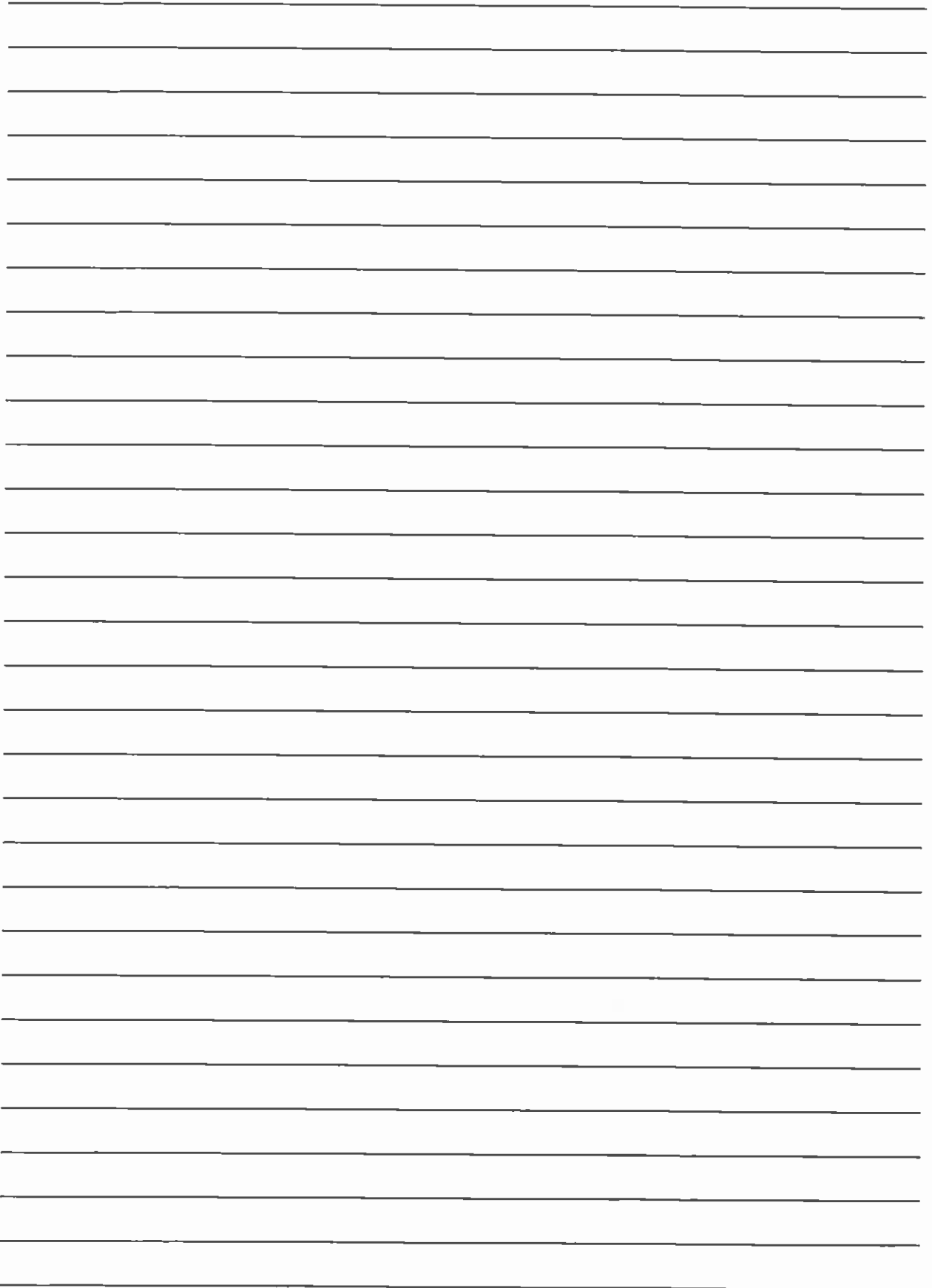
(b) Bereken die gradiënt van PS :

(c) Sonder om enige berekeninge te doen, bepaal die gradiënt van QR . Motiveer jou antwoord.

- (6) Bepaal of ΔVWX gelykbenig of gelyksydig is met $V(2 ; 6)$, $W(3 ; -1)$ en $X(-3 ; 1)$. Toon alle berekeninge:

- (7) $S(-2 ; 3)$, $T(1 ; 2)$ en $R(-3 ; 0)$ is drie punte wat rondom die punt $A(-1 ; 1)$ lê. Toon aan dat S , T en R op die omtrek van die sirkel met middelpunt A lê.

- (8) Bereken die waarde(s) van y waarvoor $PQ = QR$ indien $P(-2 ; 5)$, $Q(1 ; 6)$ en $R(0 ; y)$.

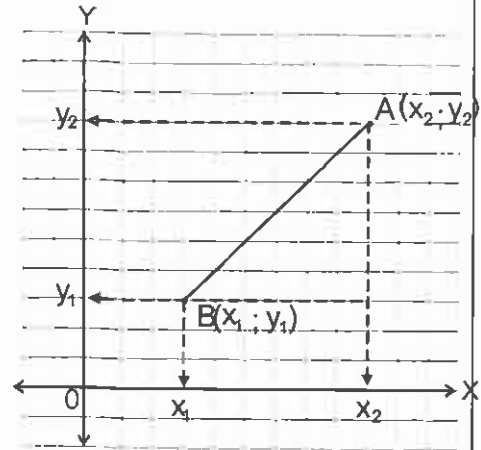


Afleiding van 'n formule vir die middelpunt van enige lynstuk tussen twee punte:

Die middelpunt M van lynstuk AB lê presies halfpad tussen A en B. \therefore M se x-koördinaat lê presies halfpad tussen die x-koördinate van A en B en M se y-koördinaat lê presies halfpad tussen A en B se y-koördinate.

$$\therefore x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{en} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\therefore M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



Vb.6 Bepaal die koördinate van die middelpunt van $R(-3 ; 2)$ en $T(-4 ; 8)$.

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} x_1 & y_1 & & x_2 & y_2 \\ R(-3 ; 2) & \text{en} & T(-4 ; 8) \end{matrix} \\ \therefore M &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{-3 + (-4)}{2} ; \frac{2 + 8}{2} \right) = \left(\frac{-3 - 4}{2} ; \frac{10}{2} \right) \\ \therefore M &= \left(\frac{-7}{2} ; 5 \right) \quad \text{óf} \quad \left(-3\frac{1}{2} ; 5 \right) \end{aligned}$$

Oefening 3:

Datum: _____

(1) Bereken die middelpunt van elk van die volgende lynstukke:

(a) $A(-2 ; 4)$ en $B(-6 ; 4)$

(b) $C(-2 ; 0)$ en $D(0 ; 2)$

(c) $I(-2 ; -7)$ en $J(2 ; 1)$

(d) $K(5 ; 1)$ en $L(11 ; 1)$
